INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

SEMINÁŘ Z MATEMATIKY 3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru SMAT_3_Literatura.

Kuželosečky – vzájemná poloha kuželosečky a přímky

Definice:

Při řešení vzájemné polohy přímky a kuželosečky vyjádříme z lineární rovnice přímky jednu neznámou (x nebo y) a dosadíme do kvadratické rovnice kuželosečky. Vznikne nová kvadratická rovnice: $Kx^2 + Lx + M = 0$. Určíme její diskriminant.

$K \neq 0, D = 0$	$K \neq 0, D > 0$	$K \neq 0, D < 0$	$K = 0, \mathrm{L} \neq 0$
jedno řešení	dvě řešení	žádné řešení	jedno řešení
společný jeden bod (tečna)	společné 2 body (sečna)	žádný společný bod (vnější přímka)	společný jeden bod (hyperbola, parabola)*

*hyperbola – rovnoběžka s jednou z asymptot
*parabola – přímka rovnoběžná s osou paraboly
Rovnice tečen jednotlivých kuželoseček (střed nebo vrchol kuželosečky v počátku souřadného systému):

kružnice - $xx_1 + yy_1 = r^2$

elipsa - $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

hyperbola - $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

parabola - $y_1 y = p \cdot (x + x_1)$

Řešené příklady:

Příklad 1)

Určete vzájemnou polohu přímky $x - 3y + 15 = 0$ a kružnice $x^2 + y^2 = 25$.
Společný bod přímky a kružnice vyhovuje soustavě rovnic, z lineární rovnice vyjádříme např. x a dosadíme do rovnice kružnice.

$x - 3y + 15 = 0 \Rightarrow x = 3y - 15$

$x^2 + y^2 = 25$

$(3y - 15)^2 + y^2 = 25$

$9y^2 - 90y + 225 + y^2 = 25$

$y^2 - 9y + 20 = 0$

určíme diskriminant: $D = b^2 - 4ac = 81 - 80 = 1 > 0$

rovnice má 2 řešení: $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{9 \pm 1}{2} = 5\,(4)$. K odpovídajícímu y určíme x

$x_1 = 3y_1 - 15 = 15 - 15 = 0$ $\qquad$ $x_2 = 3y_2 - 15 = 12 - 15 = -3$

Daná přímka je sečnou a protíná kružnici v bodech $A = [0; 5], B = [-3; 4]$.

Příklad 2)

Najděte rovnici tečny kružnice $x^2 + y^2 = 25$ v jejím bodě $T = \left[\frac{1}{2}; y\right]$.

Bod *T* je zároveň bodem kružnice i přímky (tečny), proto dosadíme souřadnici *x* do rovnice kružnice a určíme souřadnici *y*.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm\frac{3}{2}\sqrt{11}$$

Rovnice má 2 řešení, tudíž existují 2 tečny:

$$x_1x + y_1y = r^2$$
$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\sqrt{11}y = 25$$
$$x + 3\sqrt{11}y - 50 = 0$$

$$x_1x + y_1y = r^2$$
$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\sqrt{11}y = 25$$
$$x - 3\sqrt{11}y - 50 = 0$$

Příklad 3)

Vypočtěte délku tětivy, kterou vytíná přímka $3x + 4y + 5 = 0$ na kružnici $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

Vyjádříme z rovnice přímky např. *x* a dosadíme do rovnice kružnice.

$$3x + 4y + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5-4y}{3} \qquad \left(\frac{-5-4y}{3}\right)^2 + y^2 - 4\cdot\frac{-5-4y}{3} - 2y - 20 = 0$$

po úpravě: $5y^2 + 14y - 19 = 0 \Rightarrow D = 196 + 380 = 576$

$$y_{1,2} = \frac{-14 \pm 24}{10} = 1 \left(-\frac{19}{5}\right) \quad \Rightarrow x_1 = -3,\ x_2 = \frac{17}{5}$$

Přímka má s kružnicí společné 2 body $\rightarrow A = [-3;1],\ B = \left[\frac{17}{5}; -\frac{19}{5}\right]$.

Nyní určíme vzdálenost těchto 2 bodů: $|AB| = \sqrt{\left(-3-\frac{17}{5}\right)^2 + \left(1+\frac{19}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1600}{25}} = 8$

Příklad 4)

Kolik společných bodů má přímka a elipsa?

$3x - 4y - 3 = 0;\ 3x^2 + 5y^2 = 520$

Vyjádříme z první rovnice např. x a dosadíme do druhé rovnice.

$$3x - 4y - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4y+3}{3}$$

$$3\cdot\left(\frac{4y+3}{3}\right)^2 + 5y^2 = 520$$

$$\frac{16y^2 + 24y + 9}{3} + 5y^2 = 520$$

$$31y^2 + 24y - 1551 = 0 \Rightarrow D = 24^2 - 4\cdot 31\cdot(-1551) = 192\,324 > 0$$

Přímka má s elipsou 2 body.

Příklad 5)

Kolik společných bodů má daná hyperbola a přímka?

$8x^2 - 9y^2 = 144,\ y = 1$

Do druhé rovnice dosadíme rovnici přímky:

$8x^2 - 9 = 144 \Rightarrow 8x^2 = 153 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{153}{8}}$

Hyperbola má s přímkou 2 společné body.

Příklad 6)

Vypočtěte souřadnice společných bodů paraboly a přímky:

$x^2 - 4y = 0, x - y = 0$

$x - y = 0 \Rightarrow x = y$

$y^2 - 4y = 0 \Rightarrow y = 0, y = 4$

Pro daná *y* existují stejná *x*. Společné body jsou $[0;0]; [4;4]$.

Příklad 7)

Určete souřadnice společných bodů dané přímky a paraboly:

$x + y - 3 = 0, y^2 = -8x$

$x + y - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 - y$

$y^2 = -8 \cdot (3 - y)$

$y^2 - 8y + 24 = 0 \Rightarrow D = 64 - 4 \cdot 24 < 0$

Protože diskriminant je záporný, žádné společné body nejsou.

Příklad 8)

Napište rovnice asymptot, souřadnice vrcholů a ohnisek hyperboly: $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{36} = 1$

Z rovnice hyperboly zjistíme, že hlavní osa leží v ose *y*, je rovnoosá *(a = b)*. Tedy $a = b = 6$.

Rovnice asymptot: $y = \pm x$

Hlavní vrcholy jsou: $A = [0; -6], B = [0; 6]$

Ohniska: $e^2 = a^2 + b^2 = 72 \Rightarrow e = 6 \cdot \sqrt{2}$, $F_1 = [0; -6\sqrt{2}], F_2 = [0; 6\sqrt{2}]$

Příklad 9)

Bodem $R = [2; -5]$ prochází přímky, které jsou rovnoběžné a s asymptotami hyperboly $y^2 - 4x^2 = 4$. Určete jejich rovnice a průsečíky s danou hyperbolou.

Upravíme rovnici hyperboly (určíme *a*, *b*) a sestavíme rovnice asymptot.

$y^2 - 4x^2 = 4$

$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ hyperbola má hl. osu v ose *y*, *a = 2*, *b = 1*

Rovnice asymptot otočené hyperboly: $y = \pm\frac{a}{b}x = \pm 2x$

Nyní určíme přímky rovnoběžné s asymptotami (mají stejnou směrnici), procházející bodem *R*.

1. rovnice: $-5 = 2 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -9$ rovnice rovnoběžné přímky: $y = 2x - 9$

2. rovnice: $-5 = -2 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -1$ rovnice rovnoběžné přímky: $y = -2x - 1$

Nyní budeme řešit průsečíky těchto přímek s hyperbolou:

1. přímka s hyperbolou:

$y = 2x - 9$

$(2x - 9)^2 - 4x^2 = 4 \Rightarrow x = \frac{77}{36} \Rightarrow y = -\frac{85}{18}$

2. přímka s hyperbolou:
$y = -2x - 1$

$$(-2x-1)^2 - 4x^2 = 4 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$$

Příklad 10)

Rozhodněte, které z následujících rovnic jsou rovnicemi paraboly a určete vždy souřadnice vrcholu V paraboly, její ohnisko F a rovnici osy paraboly i řídící přímky paraboly d:

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$ b) $y = 4x^2 - 8x + 7$ c) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$

Rovnice se pokusíme převést na rovnice paraboly.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}\cdot x^2 + x + 2 \\ 4y &= x^2 + 4x + 8 \\ 4y - 4 &= (x+2)^2 \\ 4\cdot(y-1) &= (x+2)^2 \end{aligned}$$

$V = [-2; 1]$, osa paraboly je rovnoběžná s osou y $(x = -2)$
$p = 2$, $F = [-2; 2]$, $d : y = 0$

$$\begin{aligned} y &= 4\cdot x^2 - 8x + 7 \\ y - 7 &= 4\cdot(x^2 - 2x) \\ (y-3) &= 4\cdot(x-1)^2 \\ \frac{1}{4}\cdot(y-3) &= (x-1)^2 \end{aligned}$$

$V = [1; 3]$, osa paraboly je rovnoběžná s osou y $(x = 1)$
$p = \frac{1}{8}$, $F = \left[1; \frac{49}{16}\right]$, $d : y = \frac{47}{16}$

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{6}x_2 + 2x - 7 \\ -6y - 42 &= x^2 - 12x \\ -6y - 6 &= (x-6)^2 \\ -6\cdot(y+1) &= (x-6)^2 \end{aligned}$$

$V = [6; -1]$, osa paraboly je rovnoběžná s osou y $(x = 6)$
$p = 3$, $F = \left[6; -\frac{5}{2}\right]$, $d : y = \frac{1}{2}$

Použitá literatura

Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990.
Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
Beran, L. – Ondráčková, I.: Prověřte si své matematické nadání. SNTL Praha 1988.
Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.
Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS 2002.
Jirásek F. – Horák S.: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU. Prométheus 2006.