INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

SEMINÁŘ Z MATEMATIKY 3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru SMAT_3_Literatura.

Kuželosečky

Definice:

Kružnice:

Je množina všech bodů v rovině, které mají od pevného bodu (středu kružnice) stejnou vzdálenost r, $r > 0$. Kružnici získáme jako průsečnici rotační kuželové plochy a roviny, která je kolmá na osu kužele.

<u>středový tvar rovnice kružnice</u>

$x^2 + y^2 = r^2$ střed kružnice je v počátku souřadného systému

$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ střed kružnice je posunutý $S = [m; n]$

<u>obecná rovnice kružnice</u>

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

Elipsa:

Je množina všech bodů v rovině, které mají od 2 pevných bodů F_1, F_2 (ohnisek) stálý součet vzdáleností $2a$, který je větší než vzdálenost bodů F_1, F_2. Vzniká jako průsečnice rotační válcové plochy a roviny, která není kolmá k ose plochy ani s ní rovnoběžná.

$|F_1P + F_2P| = 2a, 2a > |F_1F_2|$

a – hlavní poloosa

b – vedlejší poloosa

e – exentricita

<u>osová rovnice elipsy</u>

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ střed elipsy leží v počátku souřadného systému

$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ střed elipsy je posunutý $S = [m; n]$, hlavní poloosa a je rovnoběžná. s osou x

$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$ střed elipsy je posunutý $S = [m; n]$, hlavní poloosa a je rovnoběžná s osou y

<u>obecná rovnice elipsy</u>

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad A \neq B, A, B > 0$

$a^2 = e^2 + b^2$

Hyperbola:

Je množina všech bodů v rovině, které mají od 2 pevných bodů F_1, F_2 (ohnisek) stálou absolutní hodnotu rozdílu jejich vzdáleností rovnou $2a$, která je menší než vzdálenost bodů F_1, F_2. Hyperbola je průsečnicí kuželové plochy a roviny, která svírá s osou kužele úhel menší, než úhel mezi osou kužele a površkou.

$\big||F_1P| - |F_2P|\big| = 2a, 2a < |F_1F_2|$

<u>osová rovnice hyperboly</u>

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ střed hyperboly je v počátku souřadného systému

$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ střed hyperboly je posunutý $S = [m; n]$, hlavní poloosa rovnoběžná s x

$-\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$ střed hyperboly je posunutý $S = [m; n]$, hlavní poloosa rovnoběžná s y

$e^2 = a^2 + b^2$

rovnice asymptot hyperboly

$y = \pm \frac{b}{a} x$

obecná rovnice hyperboly

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, $A \cdot B < 0$ (Každá rovnice tohoto tvaru není rovnicí hyperboly.)

Parabola

Je množina všech bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od daného bodu *F* (ohniska) a od dané přímky *d* (řídící přímka), která tímto bodem neprochází. Parabola je průsečnicí kuželové plochy a roviny, která je rovnoběžná s jednou přímkou (površkou) kuželové plochy.

$|FP| = |dP|$

vrcholové rovnice paraboly, $p > 0$ (vzdálenost bodu F od řídící přímky *d* – parametr paraboly)

$y^2 = 2px$	vrchol je v bodě $[0;0]$, je rozevřená napravo
$y^2 = -2px$	vrchol je v bodě $[0;0]$, je rozevřená nalevo
$x^2 = 2py$	vrchol je v bodě $[0;0]$, je rozevřená nahoru
$x^2 = -2py$	vrchol je v bodě $[0;0]$, je rozevřená dolu
$(y-n)^2 = 2p(x-m)$	vrchol je v bodě $[m;n]$, je rozevřená napravo
$(y-n)^2 = -2p(x-m)$	vrchol je v bodě $[m;n]$, je rozevřená nalevo
$(x-m)^2 = 2p(y-n)$	vrchol je v bodě $[m;n]$, je rozevřená nahoru
$(x-m)^2 = -2p(y-n)$	vrchol je v bodě $[m;n]$, je rozevřená dolu

obecné rovnice paraboly

$y^2 + Ax + By + C = 0$

$x^2 + Ax + By + C = 0$

Řešené příklady:

Příklad 1)

Napište rovnici kružnice se středem *S* a poloměrem *r*, je – li

$S = [-4;3], r = 5$

$S = [3;-6], r = 9$

Jedná se o kružnice, které mají střed mimo počátek soustavy souřadnic. Dosadíme tedy do středového tvaru rovnice kružnice.

$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$

$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$

$(x-3)^2 + (y+6)^2 = 81$

Dále upravíme středové rovnice (na pravé straně bude 0) a vytvoříme obecné rovnice kružnice.

$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$

$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 25$

$x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$

$$(x-3)^2+(y+6)^2=81$$
$$x^2-6x+9+y^2+12y+36=81$$
$$x^2+y^2-6x+12y+45-81=0$$
$$x^2+y^2-6x+12y-36=0$$

Příklad 2)

Napište rovnici kružnice, jejímž průměrem je úsečka určená body $A=[0;0]; B=[-4;6]$.

Průměr kružnice je vzdálenost mezi těmito dvěma body, střed kružnice je středem této úsečky. Střed kružnice neleží v počátku soustavy souřadnic.

Vzdálenost AB:

$$|AB|=\sqrt{(0+4)^2+(0-6)^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{52}}{2}$$

Střed kružnice:

$$S=\frac{A+B}{2}=\frac{[0;0]+[-4;6]}{2}=[-2;3]$$

Středový tvar rovnice kružnice:

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$$
$$(x+2)^2+(y-3)^2=\frac{52}{4}$$

Obecná rovnice kružnice:

$$(x+2)^2+(y-3)^2=\frac{52}{4}$$
$$x^2+4x+4+y^2-6y+9=\frac{52}{4}$$
$$4x^2+4y^2+16x-24y=0$$

Příklad 3)

Zjistěte, zda dané rovnice jsou analytickým vyjádřením kružnice. Jestliže ano, najděte jejich středy a poloměry.

a) $x^2+y^2-2x+4y=4$

b) $x^2+y^2+2y+1=0$

Obecné rovnice kružnice budeme upravovat na středový tvar.

$$x^2+y^2-2x+4y=4$$
$$x^2-2x+y^2+4y-4=0$$
$$(x-1)^2-1+(y+2)^2-4-4=0$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2=9$$
$$\boxed{S=[1;-2], r=3}$$

$$x^2+y^2+2y+1=0$$
$$x^2+(y+1)^2-1+1=0$$
$$x^2+(y+1)^2=0$$

$\boxed{\text{toto není rovnice kružnice}}$

Příklad 4)

Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu v ose *x* a vedlejší osu v ose *y*, je – li $a=13, b=5$.

Vytvoříme osovou i obecnou rovnici elipsy (v zadání není stanoven typ rovnice). Protože obě poloosy leží na osách souřadného systému, je střed elipsy počátkem souřadného systému.

osová rovnice:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$$

obecná rovnice:

$$25x^2+169y^2=169\cdot 25$$

$$25x^2+169y^2-4225=0$$

Příklad 5)

Najděte souřadnice středu *S*, délky poloos a excentricitu elipsy:

$$9x^2+25y^2-54x-100y-44=0$$

$$9x^2+y^2+9x-4y=0$$

Obecné rovnice budeme převádět na osové

$$9x^2+25y^2-54x-100y-44=0$$

$$9x^2-54x+25y^2-100y=44$$

$$9\cdot\left(x^2-6x\right)+25\cdot\left(y^2-4y\right)=44$$

$$9\cdot\left[(x-3)^2-9\right]+25\cdot\left[(y-2)^2-4\right]=44$$

$$9\cdot(x-3)^2-81+25\cdot(y-2)^2-100=44$$

$$9\cdot(x-3)^2+25\cdot(y-2)^2-181=44$$

$$9\cdot(x-3)^2+25\cdot(y-2)^2=225$$

$$\frac{9\cdot(x-3)^2}{225}+\frac{25\cdot(y-2)^2}{225}=1$$

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1$$

$$e^2=a^2-b^2$$

$$e=\sqrt{25-9}$$

$$e=4$$

$$\boxed{S=[3;2],\ a=5,\ b=3,\ e=4}$$

$$9x^2+y^2+9x-4y=0$$

$$9\cdot\left(x^2+x\right)+(y-2)^2-4=0$$

$$9\cdot\left[(x+0{,}5)^2-0{,}25\right]+(y-2)^2=4$$

$$9\cdot(x+0{,}5)^2-2{,}25+(y-2)^2=4$$

$$9\cdot(x+0{,}5)^2+(y-2)^2=6{,}25$$

$$\frac{(x+0{,}5)^2}{\frac{25}{36}}+\frac{(y-2)^2}{\frac{25}{4}}=1$$

$$\boxed{S=[-0{,}5;2],\ a=\frac{5}{2},\ b=\frac{5}{6},\ e=\frac{200}{36}}$$

Příklad 6)

Zjistěte, zda existuje elipsa, která má osy rovnoběžné s osami souřadnic, střed $S=[3;1]$ a prochází body $A=[-2;0]$, $B=[0;2]$.

Při řešení budeme vycházet ze středové rovnice elipsy, jejíž střed je posunutý. Tyto 2 body postupně dosadíme do rovnice a zkusíme určit poloosy.

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(-2-3)^2}{a^2}+\frac{(0-1)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(0-3)^2}{a^2}+\frac{(2-1)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{25}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$$

$$\frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$$

$$25b^2+a^2=a^2b^2$$

$$9b^2+a^2=a^2b^2$$

$$a^2 - a^2b^2 = -25b^2$$
$$a^2 - a^2b^2 = -9b^2$$

dvě stejné levé strany nemůžou mít jinou pravou stranu $\Rightarrow$ taková elipsa neexistuje

Příklad 7)

Napište rovnice hyperboly se středem $S = [0; 0]$ a hlavní osou v ose *x*, je –li:

$a = 8, b = 4$

$a = 4, e = 5$

Pro určení hyperboly použijeme osové rovnice hyperboly se středem v počátku souřadného systému

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\qquad$ $e^2 = a^2 + b^2$

$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16} = 1$ $\qquad$ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ $\qquad$ $b^2 = e^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{25-16} = 3$

Příklad 8)

Napište osovou rovnici hyperboly, která má střed v počátku soustavy souřadnic, hlavní osu v ose *x*, $a = 3$, prochází bodem $M = [5; 2]$.

Z osové rovnice hyperboly určíme druhou poloosu *b* tak, že dosadíme za *x* a *y* souřadnice bodu *M*.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{25}{9} - \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow b = \frac{3}{2}$

Rovnice hyperboly je $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$

Příklad 9)

Najděte poloosy dané hyperboly a zapište rovnice jejích asymptot.

$9x^2 - 16y^2 = 144$

$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1$ $\qquad$ poloosy $a = 4, b = 3$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

rovnice asymptot:

$y = \frac{b}{a}x$ $\qquad$ $y = -\frac{b}{a}x$

$y = \frac{3}{4}x$ $\qquad$ $y = -\frac{3}{4}x$

Příklad 10)

Určete střed a poloosy dané hyperboly $x^2 - y^2 + 6x - 8y - 107 = 0$

Při řešení se pokusíme proměnnou *x* převést na druhou mocninu dvojčlenu, stejně tak i *y*. Potom upravíme na osový tvar.

$x^2 - y^2 + 6x - 8y - 107 = 0$

$x^2 + 6x - y^2 - 8y = 107$

$(x+3)^2 - 9 - (y+4)^2 + 16 = 107$

$(x+3)^2 - (y+4)^2 = 100$

$\frac{(x+3)^2}{100} - \frac{(y+4)^2}{100} = 1$

Střed a poloosy jsou: $S = [-3; -4]; a = b = 10$

Příklad 11)

Napište rovnici paraboly, která má vrchol v počátku soustavy souřadnic a ohnisko v bodě:

a) $[1; 0]$

b) $[0; 2]$

a) Sestavíme vrcholovou rovnici paraboly s vrcholem v počátku soustavy souřadnic. Bod $[1; 0]$ nám určuje ohnisko, je tedy parabola rozevřená napravo. Vzdálenost vrcholu a ohniska je 1, tudíž celé *p* je 2.

$y^2 = 2px$

$y^2 = 2 \cdot 2 \cdot x$

$y^2 = 4x$

b) Sestavíme vrcholovou rovnici paraboly s vrcholem v počátku soustavy souřadnic. Bod $[0; 2]$ nám určuje ohnisko, je tedy parabola rozevřená nahoru. Vzdálenost vrcholu a ohniska je 2, tudíž celé *p* je 4.

$x^2 = 2py$

$x^2 = 2 \cdot 4 \cdot y$

$x^2 = 8y$

Příklad 12)

Napište vrcholovou rovnici paraboly, která má vrchol *V* a prochází bodem *R:*

$V = [1; -3], R = [5; -9]$

Parabola je rozevřená napravo (zjistíme dle vrcholu a bodu *R*), použijeme odpovídající rovnici s posunutým vrcholem a do rovnice dosadíme souřadnice bodu *R*.

$(y+3)^2 = 2p(x-1)$

$(-9+3)^2 = 2p(5-1)$

$36 = 2p \cdot 4$

$p = 4{,}5$

rovnice paraboly je: $(y+3)^2 = 9(x-1)$

Příklad 13)

Vypočtěte souřadnice vrcholu *V* a ohniska *F* paraboly a potom parabolu načrtněte:

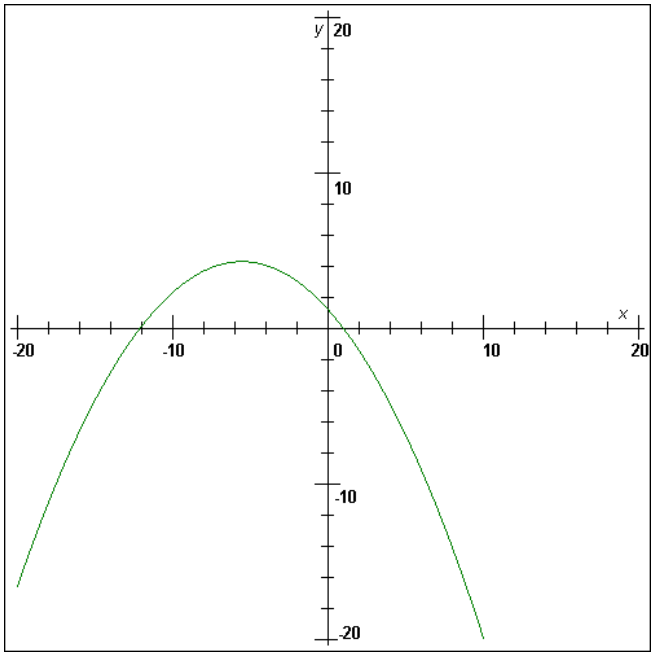
$x^2 + 10x + 9y - 11 = 0$

$(x+5)^2 - 25 = 11 - 9y$

$(x+5)^2 = -9y + 36$

$(x+5)^2 = -9 \cdot (y-4)$

Bod $V = [-5; 4]$, $p = 4{,}5$; parabola je rozevřená dolů, $F = [-5; 1{,}75]$



Použitá literatura

Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990.
Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
Beran, L. – Ondráčková, I.: Prověřte si své matematické nadání. SNTL Praha 1988.
Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.
Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS 2002.
Jirásek F. – Horák S.: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU. Prométheus 2006.