INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

SEMINÁŘ Z MATEMATIKY 3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru SMAT_3_Literatura.

Užití integrálního počtu

Definice:

<u>Obsah rovinného obrazce:</u>
Je-li útvar omezen osou x a přímkami $x = a$, $x = b$ a grafem spojité nezáporné funkce v uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$, je obsah útvaru $S = \int_a^b f(x)dx$.

Jestliže integrovaná funkce $f(x)$ nabývá v intervalu $\langle a; b\rangle$ nekladných hodnot, pak pro obsah platí: $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx$.

Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru kolem osy x se vypočítá podle vztahu

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)dx$$

Útvar je ohraničen křivkou o rovnici $y = f(x)$, která je grafem spojité funkce v intervalu $\langle a; b\rangle$.

Řešené příklady:

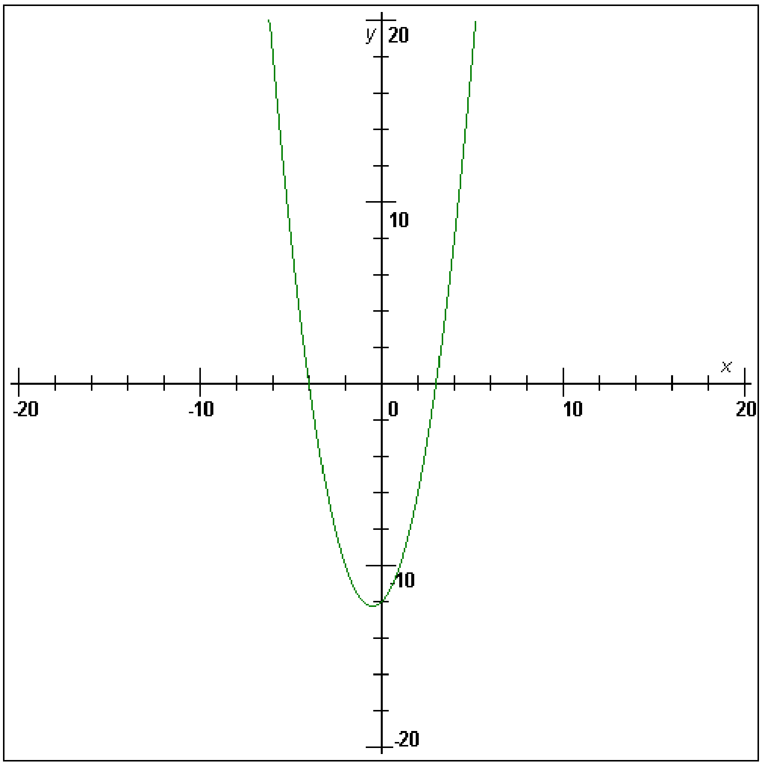
Příklad 1.
Vypočítejte obsah útvaru omezeného grafem funkce $y = f(x) = x^2$, osou x a přímkami $x = 1$, $x = 2$.
Grafem funkce je parabola, procházející počátkem souřadného systému $V = [0; 0]$, otevírá se do kladné části osy y. Křivka má s osami pouze jediný průsečík, bod $V = [0; 0]$

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}[8-1] = \frac{7}{3}\ \mathrm{j}^2$$ (čtverečných jednotek)

Příklad 2.

Vypočítejte obsah útvaru omezeného křivkou $y = f(x) = x^2 + x - 12$ osou x a přímkami $x = -5, x = 6$

Grafem funkce je parabola s vrcholem v bodě $V = \left[-\frac{1}{2}; -\frac{49}{4}\right]$. Vrchol je lokální minimum funkce.



Průsečíky s osou x

$x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 3$

$P_{x_1} = [-4; 0], P_{x_2} = [3; 0]$

Dále určíme průsečíky grafu s přímkami $x = -5, x = 6 \Rightarrow f(-5) = 8,\ f(6) = 30$

Vypočítáme obsah zkoumaného objektu:

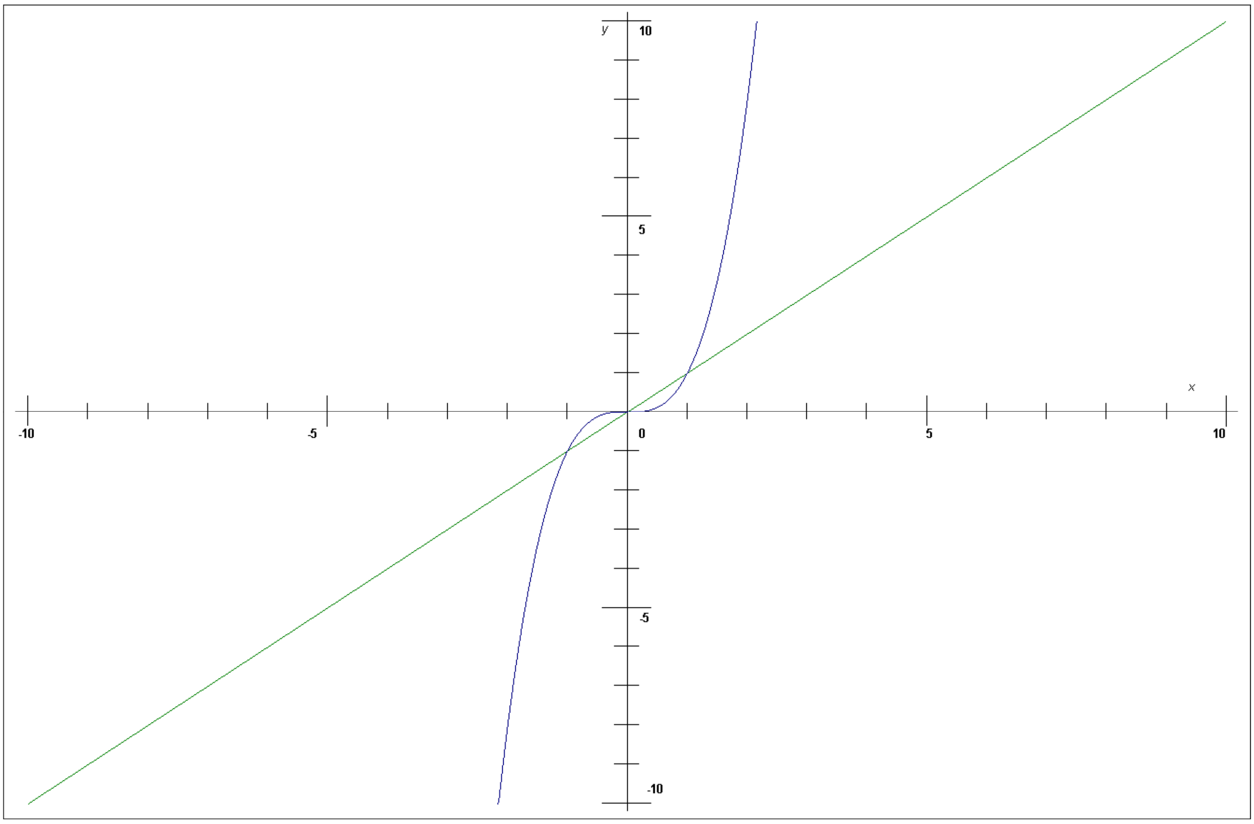
$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_{-5}^{-4} (x^2 + x - 12)dx + \int_{3}^{-4} (x^2 + x - 12)dx + \int_{3}^{6} (x^2 + x - 12)dx$$

$$S = \left(\frac{23}{6} + \frac{343}{6} + \frac{243}{6}\right) \text{j}^2$$

$$S = 101{,}5\, j^2$$

Příklad 3.

Vypočtěte obsah útvaru omezeného křivkami $y = f(x) = x,\ y = f(x) = x^3$



Určíme průsečíky obou křivek:

$$x^3 = x$$

$$0 = x^3 - x$$

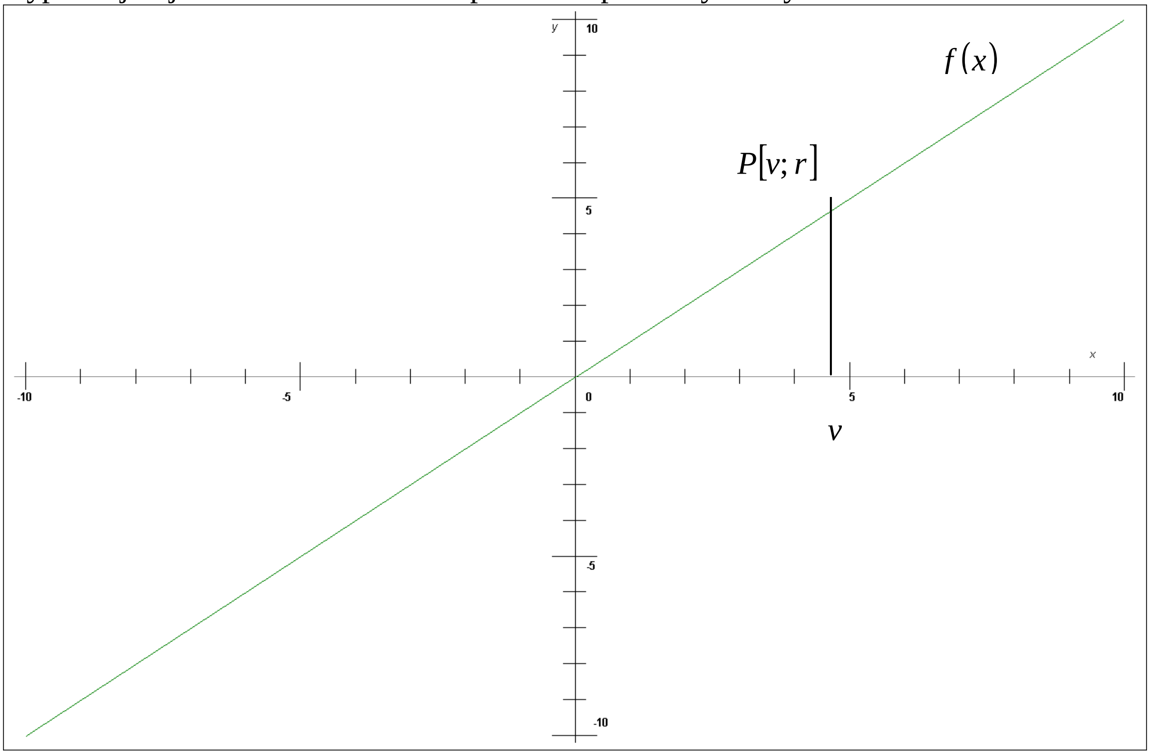
$$0 = x \cdot (x+1) \cdot (x-1) \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$$

$$P_{x_1} = [0; 0],\ P_{x_2} = [-1; -1],\ P_{x_3} = [1; 1]$$

Vypočítáme obsah zkoumaného objektu – objekt je souměrný podle počátku souřadného systému.

$$S = 2 \cdot \left[\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^3\,dx \right] = 2 \cdot \left\{ \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^1 - \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 \right\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{j}^2$$

Příklad 4.
Vypočítej objem rotačního kuželе o poloměru podstavy *r* a výšce *v*.



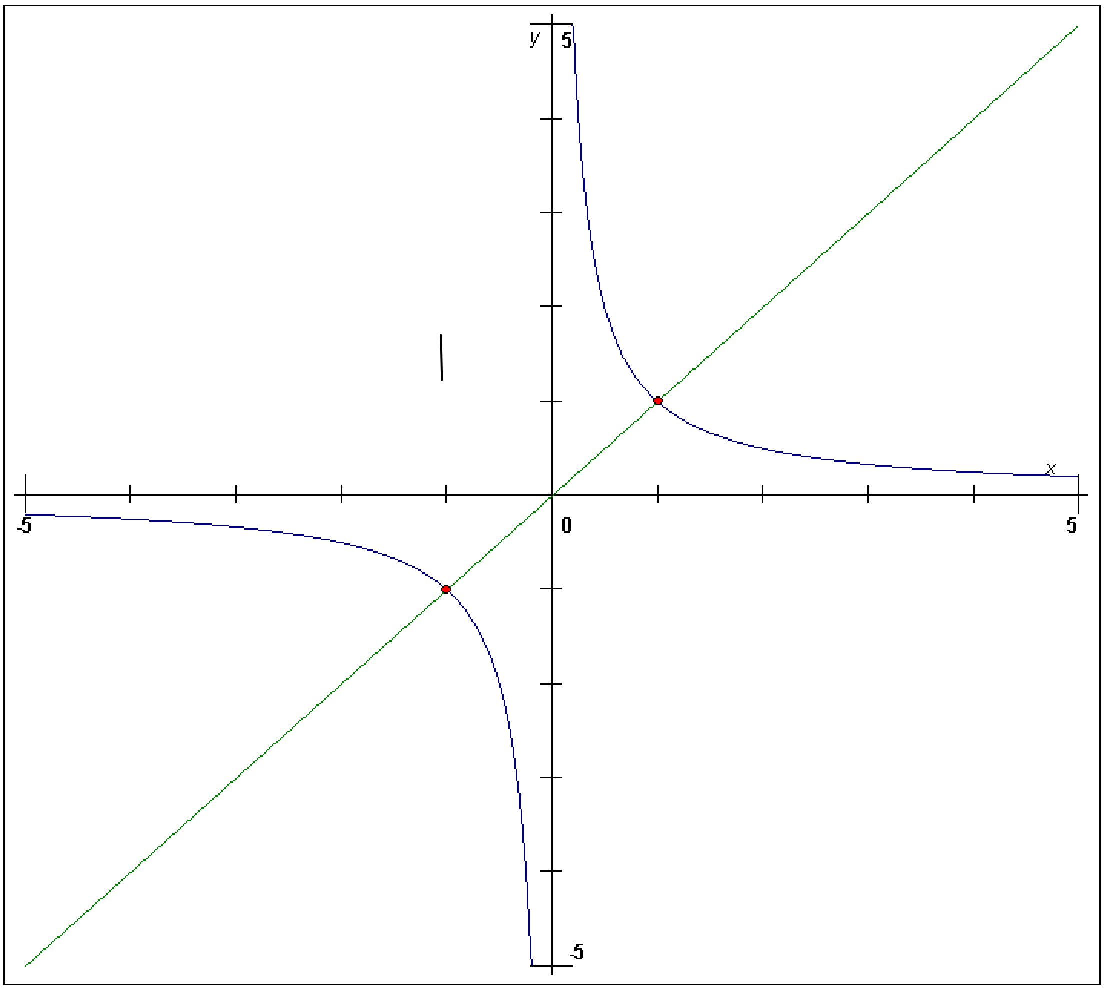
Rotuje-li vybraný trojúhelník kolem osy *x*, můžeme použít vztah pro výpočet objemu pomocí integrálu. Je třeba určit předpis lineární funkce: $f(x) = \frac{r}{v}x$

$$V = \pi \cdot \int_0^v f^2(x)dx = \pi \int_0^v \left(\frac{r}{v}x\right)^2 dx = \frac{\pi \cdot r^2}{3v^2} \cdot \left[x^3\right]_0^v = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 v$$

Příklad 5.

Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami

$y = f(x) = x,\ y = f(x) = \frac{1}{x},\ x = 2,\ y = 0$ kolem osy x.



Určíme průsečíky obou křivek

$x = \frac{1}{x} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1$

Zvoleným podmínkám odpovídá jediný bod $P = [1;1]$

$$V = V_1 + V_2 = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} j^3$$

Použitá literatura

Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990.
Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
Beran, L. – Ondráčková, I.: Prověřte si své matematické nadání. SNTL Praha 1988.
Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.
Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS 2002.
Jirásek F. – Horák S.: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU. Prométheus 2006.