I N V E S T I C E   D O   R O Z V O J E   V Z D Ě L Á V Á N Í

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

SEMINÁŘ Z MATEMATIKY 3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru SMAT_3_Literatura.

Integrační metody určitého integrálu

Definice:

Metoda per partes v určitém integrálu:

Jsou-li funkce $u(x), v(x)$ funkce, které mají v intervalu $\langle a; b\rangle$ spojité derivace, pak platí:

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx$$

Metoda substituce v určitém integrálu:

Jsou-li funkce $t = g(x)$ a její derivace $g'(x)$ spojité v uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$ a je-li zároveň i funkce $f(t)$ spojitá pro všechna $t = g(x)$, kde $x \in \langle a; b\rangle$, pak platí:

$$\int_a^b f[g(x)]\cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

Řešené příklady:

Příklad 1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx \left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{matrix} \right| = [x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\cdot\sin 0\right) + [\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Příklad 2.

$$\int_1^2 xe^x dx \left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{matrix} \right| = [xe^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx = (2e^2 - e) - (e^2 - e) = e^2$$

Příklad 3.

$$\int_1^2 \ln x dx \left| \begin{matrix} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix} \right| = [x\ln x]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} x dx = (2\ln 2 - \ln 1) - [x]_1^2 = 2\ln 2 - \ln 1 - 2 + 1 = 2\ln 2 - 1 =$$

$$\ln 4 - \ln e = \ln\frac{4}{e}$$

Příklad 4.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx \left| \begin{matrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{matrix} \right| = [x^2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx \left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = \cos x \end{matrix} \right| =$$

$$[x^2 \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2[x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi^2}{4}1 - 0\cdot 1\right) - 2\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0 - 0\cdot 1\right) - 2(1-0) = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

$2x + 1 = t = g(x) \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow$

$dx = \frac{dt}{2}$

Pro $x = 1$ je $t = 3$ (dolní mez)

Pro $x = 2$ je $t = 5$ (horní mez)

Příklad 5.

$$\int_1^2 (2x+1)^2\,dx = \int_3^5 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_3^5 = \frac{125}{3} - \frac{27}{3} = \frac{98}{3} = 32\frac{2}{3}$$

Příklad 6.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\int_2^1 \frac{t\cdot dt}{t} = \int_1^2 dt = [t]_1^2 = 2-1=1$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sqrt{4-x^2} = t \Rightarrow 4-x^2 = t^2 \\ \Rightarrow xdx = -tdt\end{array}}$$

Použitá literatura

Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990.
Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
Beran, L. – Ondráčková, I.: Prověřte si své matematické nadání. SNTL Praha 1988.
Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.
Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS 2002.
Jirásek F. – Horák S.: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU. Prométheus 2006.