I N V E S T I C E   D O   R O Z V O J E   V Z D Ě L Á V Á N Í

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

SEMINÁŘ Z MATEMATIKY 3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru SMAT_3_Literatura.

Určitý integrál

Definice:

Primitivní funkce

Jsou dány funkce $F(x)$, $f(x)$ definované na uzavřeném intervalu $\langle a;b\rangle$. Jestliže pro všechna $x\in\langle a;b\rangle$ platí $F'(x)=f(x)$, přičemž derivací funkce F v bodě *a* rozumíme derivaci v bodě *a* zprava a derivaci funkce F v bodě *b* derivaci v bodě *b* zleva, říkáme, že funkce $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle a;b\rangle$.

Nechť F je primitivní funkce k funkci *f* v intervalu $\langle a;b\rangle$. Rozdíl $F(b)-F(a)$ funkčních hodnot funkce F v libovolných bodech tohoto intervalu se nazývá určitý integrál funkce *f* v mezích od *a* do *b* a označuje se $\int_a^b f(x)dx$.

Platí tedy: $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

Věty o integraci určitého integrálu:

Nechť f_1, f_2 jsou spojité funkce v intervalu $\langle a;b\rangle$, c_1, c_2, c jsou libovolné reálné konstanty. Pak platí:

$$\int_a^b [c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)]dx=c_1\cdot\int_a^b f_1(x)dx+c_2\cdot\int_a^b f_2(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx=c\cdot\int_a^b f(x)dx$$

Je-li funkce spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a;b\rangle$, pak platí:

$$\int_a^b f(x)dx\geq 0$$

Jsou-li funkce *f*, *g* spojité v intervalu $\langle a;b\rangle$ a je-li $f(x)\geq g(x)$, pak platí:

$$\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$$

Při záměně mezí určitého integrálu se mění znaménko určitého integrálu:

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

Je-li funkce *f* spojitá na intervalu $\langle a;b\rangle$, který obsahuje body *a*, *b*, *c*, pak platí:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

Řešené příklady:

Příklad 1.
Vypočtěte integrály:

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_0^1 - \text{není definováno}$$

$$\int_1^3 \left(2x^2 - 3^x + 1\right)dx = \left[2\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + x\right]_1^3 = 2\cdot 9 - \frac{3^3}{\ln 3} + 3 - \left(2\cdot\frac{1}{3} - \frac{3^1}{\ln 3} + 1\right) = -2{,}51$$

$$\int_{-1}^2 7x^5 dx = \left[7\frac{x^6}{6}\right]_{-1}^2 = 7\cdot\frac{2^6}{6} - \frac{7}{6} = 73{,}5$$

$$\int_0^{11} (x+1)^3\,dx = \int_0^{11} \left(x^3 + 3x^2 + 3x + 1\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} + 3\cdot\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{11} = \frac{11^4}{4} + 3\cdot\frac{11^3}{3} + 3\cdot\frac{11^2}{2} + 11 - 0 = \frac{20735}{4}$$

$$\int_1^e \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

Příklad 2.
Vypočtěte integrály:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1$$

$$\int_{-2}^8 4^x\,dx = \left[\frac{4^x}{\ln 4}\right]_{-2}^8 = \frac{4^8}{\ln 4} - \frac{4^{-2}}{\ln 4} = \frac{1}{\ln 4}\cdot\left(4^8 - 4^{-2}\right)$$

$$\int_1^3 \left(5x^2 - 2x + 3\right)dx = \left[5\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 3x\right]_1^3 = \frac{5\cdot 3^3}{3} - 3^2 + 9 - \left(\frac{5}{3} - 1 + 3\right) = \frac{124}{3}$$

Příklad 3.
Vypočtěte integrály:

$$\int_0^{10} \frac{x}{x+1}dx = \int_0^{10}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = [x - \ln(x+1)]_0^{10} = 10 - \ln 11$$

$$\int_0^1 \frac{2x^2 + 3x + 2}{2x+1}dx = \int_0^1\left(x + 1 + \frac{1}{2x+1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + \ln(2x+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 + \ln 3 - 0 - 0 - \ln 1 = \frac{3}{2} + \ln 3$$

$$\int_{-a}^a x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-a}^a = \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{4} = 0$$

Příklad 4.

Vypočtěte integrály:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\int_0^3 \cos x dx - \int_{-3}^0 \cos x dx = [\sin x]_0^3 - [\sin x]_{-3}^0 = \sin 3 - \sin 0 - \sin 0 + \sin(-3) = 0$$

Použitá literatura

Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990.
Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
Beran, L. – Ondráčková, I.: Prověřte si své matematické nadání. SNTL Praha 1988.
Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.
Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS 2002.
Jirásek F. – Horák S.: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU. Prométheus 2006.