EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jihočeský kraj

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

SEMINÁŘ Z MATEMATIKY 3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru SMAT_3_Literatura.

Primitivní funkce, integrace základních funkcí

Definice:

Primitivní funkce

Jsou dány funkce $F(x)$, $f(x)$ definované na otevřeném intervalu *J*. Jestliže pro všechna $x \in J$ platí $F'(x) = f(x)$, říkáme, že funkce $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$ na otevřeném intervalu J.

Pro označení primitivní funkce používáme zápis $\int f(x)dx = F(x) + c$, kde $f(x)$ nazýváme integrafem, symbol $\int$ integračním znakem, *c* integrační konstanta, dx slouží k odlišení integrační proměnné *x* od případných parametrů. Určení primitivní funkce $F(x)+c$ nazýváme také integrací funkce $f(x)$. $\int f(x)dx$ se také nazývá neurčitý integrál.

Základní vzorce pro určení primitivních funkcí:

	vzorec	interval
1.	$\int 0dx = c$	$\forall x \in R$
2.	$\int dx = x + c$	$\forall x \in R$
3.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\forall x \in (0;\infty), n \in R - \{-1\}$
4.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\forall x \in (0;\infty)$
5.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + c$	$\forall x \in (-\infty;0)$
6.	$\int e^x dx = e^x + c$	$\forall x \in (-\infty;\infty)$
7.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\forall x \in (-\infty;\infty), a > 0, a \neq 1$
8.	$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\forall x \in (-\infty;\infty)$
9.	$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\forall x \in (-\infty;\infty)$
10.	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$	$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in Z$
11.	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot gx + c$	$\forall x \in (k\pi; \pi + k\pi), k \in Z$

Věty o integraci

Funkce f, g mají primitivní funkce na intervalu (a,b), $c_1, c_2 \in R$, potom platí na intervalu (a,b):

$$\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

$$\int cf(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$$

Řešené příklady:

Příklad 1.

Ověřte platnost vztahu $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + c$ (primitivní funkci derivujeme)

$$(tgx + c)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' + c' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Příklad 2.

$$\int (e^x + \sin x)dx = \int e^x dx + \int \sin x dx = e^x - \cos x + c$$

$$\int (e^x + \cos x)dx = \int e^x dx + \int \cos x dx = e^x + \sin x + c$$

Příklad 3.

$$\int a^x \cdot \left(1 + \frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx = \int a^x dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx = \frac{a^x}{\ln a} + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = \frac{a^x}{\ln a} - \frac{2}{\sqrt{x}} + c \text{ pro } a > 0, a \neq 1, x > 0$$

Příklad 4.

$$\int \frac{4x^2 + 3ax - 1}{x^3}dx = \int \frac{4}{x}dx + \int \frac{3a}{x^2}dx - \int \frac{1}{x^3}dx = 4\ln|x| - \frac{3a}{x} + \frac{1}{2x^2} + c \text{ pro}$$

$x \in (0; +\infty)$ nebo $x \in (-\infty; 0)$

Příklad 5.

$$\int tg^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int dx = tgx - x + c \text{ pro}$$

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in Z$$

Příklad 6.

$$\int \sqrt[6]{x^5}dx = \frac{x^{\frac{5}{6}+1}}{\frac{5}{6}+1} + c = \frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}} + c = \frac{6 \cdot \sqrt[6]{x^{11}}}{11} + c \text{ pro } \forall x \in (0; +\infty)$$

Příklad 7.

$$\int x \cdot \sqrt[3]{x}dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{4}{3}}dx = \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} + c = \frac{3 \cdot \sqrt[3]{x^7}}{7} + c$$

Příklad 8.

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1 - 2\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - 2\int dx = -\cot gx - 2x + c \text{ pro}$$

$$\forall x \in (k\pi; \pi + k\pi), k \in Z$$

Příklad 9.

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \text{ pro } x > 0$$

Příklad 10.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = -\cot gx - tgx + c \text{ pro}$$

$$x \neq k\frac{\pi}{2}$$

Použitá literatura

Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990.
Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
Beran, L. – Ondráčková, I.: Prověřte si své matematické nadání. SNTL Praha 1988.
Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.
Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS 2002.
Jirásek F. – Horák S.: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU. Prométheus 2006.