EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jihočeský kraj

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

SEMINÁŘ Z MATEMATIKY 3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru SMAT_3_Literatura.

Integrační metody neurčitého integrálu

Metoda per partes (po částech)

Platí $\int [u(x)\cdot v(x)]' \, dx = \int u'(x)\cdot v(x)dx + \int u(x)\cdot v'(x)dx$, po úpravě a stručněji lze psát
$\int u\cdot v' dx = u\cdot v - \int u'\cdot v dx$ (vycházíme z definice derivace součinu 2 funkcí).

Metoda substituce

Nechť $F(t)$ je primitivní funkce k funkci $f(t)$ v intervalu $(\alpha;\beta)$ a funkce $t = g(x)$ má derivaci $g'(x)$ na intervalu $(a;b)$. Pro každé $x \in (a;b)$ hodnota $g(x)$ patří do intervalu $(\alpha;\beta)$. Pak v intervalu $(a;b)$ je funkce $F[g(x)]$ primitivní k funkci $f[g(x)]\cdot g'(x)$.
$\int f[g(x)]\cdot g'(x)dx = \int f(t)dt$, kde $t = g(x)$.

Řešené příklady

Příklad 1.

$$\int x\cdot e^x dx \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right| = x\cdot e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$ pro $\forall x \in R$

Příklad 2.

$$\int x^2 e^x dx \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right| = x^2\cdot e^x - \int 2x\cdot e^x dx = x^2 e^x - 2\cdot \int x\cdot e^x dx \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^x & v = e^x \end{array} \right| =$$

$$x^2 e^x - 2\cdot\left[x\cdot e^x - \int e^x dx\right] = x^2 e^x - 2\cdot\left(x\cdot e^x - e^x\right) + c$$

pro $\forall x \in R$

Příklad 3.

$$\int \ln x dx \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right| = \ln x\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x dx = \ln x\cdot x - x + c$$ pro $\forall x \in (0;\infty)$

Příklad 4.

$$\int \sin^2 x dx \left| \begin{array}{ll} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array} \right| = -\sin x\cdot\cos x + \int \cos^2 x dx = -\sin x\cdot\cos x + \int (1-\sin^2 x)dx$$

$$-\sin x\cdot\cos x + \int dx - \int \sin^2 x dx$$

Nyní řešíme rovnici:

$$\int \sin^2 x dx = -\sin x\cdot\cos x + \int dx - \int \sin^2 x dx$$

$$2\int \sin^2 x dx = -\sin x\cdot\cos x + x$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{-\sin x\cos x}{2} + \frac{x}{2} + c$$ pro $\forall x \in R$

Příklad 5.

$$\int e^x \cos x dx \left| \begin{matrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cdot \sin x dx \left| \begin{matrix} u = e^x & u' = e^x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$e^x \sin x - \left[e^x \cdot (-\cos x) - \int e^x \cdot (-\cos x) dx \right] = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

Nyní řešíme rovnici:

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \cdot (\sin x + \cos x)$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} \cdot (\sin x + \cos x) + c \qquad \text{pro } \forall x \in R$$

Příklad 6.

$$\int (2x-5)^7 dx = \int t^7 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^8}{8} + c = \frac{(2x-5)^8}{16} + c$$

substituce $t = 2x - 5 = g(x) \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$ pro $\forall x \in R$

Příklad 7.

$$\int \sin 2x dx = \int \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \cdot (-\cos t) + c = -\frac{1}{2} \cdot \cos 2x + c$$

substituce $t = 2x = g(x) \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$ pro $\forall x \in R$

Příklad 8.

$$\int (5x + \sin 7x) dx = \int 5x dx + \int \sin t \frac{dt}{7} = \frac{5x^2}{2} - \frac{1}{7} \cos t + c = \frac{5x^2}{2} - \frac{1}{7} \cos 7x + c$$

substituce $t = 7x = g(x) \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{7}$ pro $\forall x \in R$

Příklad 9.

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cdot \sin x dx = -\int (1 - t^2) dt = -\int dt + \int t^2 dt = -t + \frac{t^3}{3} + c =$$

$-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$ substituce $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -dt$ pro $\forall x \in R$

Příklad 10.

$\int \frac{4}{7-5x} dx = -\frac{4}{5} \cdot \int \frac{1}{t} dt = -\frac{4}{5} \ln|t| + c = -\frac{4}{5} \cdot \ln|7-5x| + c$ substituce:

$$7 - 5x = t \Rightarrow -5dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{dt}{5}$$

pro $\forall x \in R - \left\{ \frac{7}{5} \right\}$

Použitá literatura

Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990.
Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
Beran, L. – Ondráčková, I.: Prověřte si své matematické nadání. SNTL Praha 1988.
Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.
Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS 2002.
Jirásek F. – Horák S.: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU. Prométheus 2006.