INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

SEMINÁŘ Z MATEMATIKY 3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru SMAT_3_Literatura.

Konvexnost a konkávnost funkce, inflexní bod

Definice:

<u>Konvexnost a konkávnost</u>

Nechť je dána funkce $f(x)$, která je definována na intervalu $\langle a;b \rangle$. Jsou dány 3 body této funkce $A[x_1; f(x_1)]; B[x_2; f(x_2)]; C[x_3; f(x_3)]$ pro $x_1, x_2, x_3 \in \langle a;b \rangle$, pro které platí $x_1 < x_2 < x_3$. Nechť body *A*, *C* určují přímku. Potom:

- leží-li jakýkoliv bod *B* pod každou přímkou *AC* nebo na této přímce, pak říkáme, že funkce $f(x)$ je konvexní na intervalu $\langle a;b \rangle$
- leží-li jakýkoliv bod *B* nad každou přímkou *AC* nebo na této přímce, pak říkáme, že funkce $f(x)$ je konkávní na intervalu $\langle a;b \rangle$
- leží-li jakýkoliv bod *B* pod každou přímkou *AC*, pak říkáme, že funkce $f(x)$ je ryze konvexní na intervalu $\langle a;b \rangle$
- leží-li jakýkoliv bod *B* nad každou přímkou *AC*, pak říkáme, že funkce $f(x)$ je ryze konkávní na intervalu $\langle a;b \rangle$.

<u>Konvexnost a konkávnost pomocí derivace:</u>

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a;b \rangle$ a nechť má v intervalu $(a;b)$ druhou derivaci. Pak pro každé $x \in (a;b)$ platí:

$f''(x) \geq 0$ právě tehdy, když je funkce $f(x)$ konvexní na $\langle a;b \rangle$

je-li $f''(x) > 0$, pak je funkce $f(x)$ ryze konvexní na $\langle a;b \rangle$

$f''(x) \leq 0$ právě tehdy, když je funkce $f(x)$ konkávní na $\langle a;b \rangle$

je-li $f''(x) < 0$, pak je funkce $f(x)$ ryze konkávní na $\langle a;b \rangle$

<u>Inflexní bod</u>

je takový bod x_0, ve kterém přechází graf funkce $f(x)$ z pod tečny nad tečnu nebo obráceně. Tečna je vedena dotykovým bodem $T[x_0; f(x_0)]$

<u>Definice inflexe:</u>

Nechť je dána funkce $f(x)$, která je definována na intervalu $\langle a;b \rangle$. Existuje-li $x_0 \in (a;b)$ tak, že na intervalu $\langle a;x_0 \rangle$ je funkce $f(x)$ konvexní (konkávní) a na intervalu $\langle x_0;b \rangle$ konkávní (konvexní), pak říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 inflexi (neboli bod x_0 je inflexní).

Je-li bod x_0 inflexním bodem funkce $f(x)$ a má-li funkce $f(x)$ v tomto bodě druhou derivaci, pak $f''(x_0) = 0$.

Nechť má funkce $f(x)$ druhou derivaci v každém bodě nějakého $\delta - okolí$ bodu x_0 a nechť má tato druhá derivace $f''(x)$ v intervalu $(x_0 - \delta; x_0)\, a\, (x_0; x_0 + \delta)$ různá znaménka, pak je bod x_0 inflexním bodem funkce $f(x)$.

Řešené příklady:

Příklad 1.

Urči intervaly, v nichž je funkce $y = f(x) = 2x^3 - 4x$ konvexní nebo konkávní. Dále urči inflexní body této funkce.

Postup:

1) určíme $f'(x)$
2) určíme $f''(x)$
3) položíme $f''(x) = 0$
4) určíme body, ve kterých může nastat inflexe
5) sestavíme tabulku a určíme znaménka $f''(x)$ pro jednotlivé intervaly
6) zformulujeme závěr

$f'(x) = 6x^2 - 4$

$f''(x) = 12x$

$f''(x) = 0$

$12x = 0 \Rightarrow x = 0$

inflexe může nastat v bodě 0

$f''(-1) = -12 < 0$

$f''(1) = 12 > 0$

x	$(-\infty;0)$	$(0;\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$

Funkce je konkávní v intervalu $\left(-\infty;0\right\rangle$ a konvexní v intervalu $\left\langle 0;\infty\right)$. Inflexní bod je $x = 0$¨.

Příklad 2.

Urči intervaly, v nichž je funkce $y = f(x) = \dfrac{1}{2x^3}$ konvexní nebo konkávní. Dále urči inflexní body této funkce.

$D(f) = R - \{0\}$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}\cdot x^{-3}\right)' = \frac{1}{2}\cdot(-3)\cdot x^{-4} = -\frac{3}{2}\cdot x^{-4}$$

$f''(x) = 6x^{-5}$

$6x^{-5} = 0 \Rightarrow x = 0$ v tomto bodě neexistuje inflexe.

x	$(-\infty;0)$	$(0;\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$

Funkce je konkávní v intervalu $\left(-\infty;0\right\rangle$ a konvexní v intervalu $\left\langle 0;\infty\right)$. Inflexní bod funkce nemá.

Příklad 3.

Urči intervaly, v nichž je funkce $y = f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ konvexní nebo konkávní. Dále urči inflexní body této funkce.

$D(f) = R$

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 12x$

$12x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$

inflexe může nastat v bodech 0 a 1

$f''(-1) = 12 + 12 = 24 > 0$

$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - 6 = -3 < 0$

$f''(2) = 48 - 24 = 24 > 0$

x	$(-\infty;0)$	$(0;1)$	$(1;\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Funkce je konvexní v intervalech $(-\infty;0\rangle$ a $\langle 1;+\infty)$ a konkávní v intervalu $\langle 0;1\rangle$. Inflexní body jsou 0 a 1.

Příklad 4.

Najděte intervaly konvexnosti a konkávnosti a inflexní body funkce $f(x) = x^4 - 6x + 2$

$D(f) = R$

$f'(x) = 4x^3 - 6$

$f''(x) = 12x^2$

$12x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(-1) = 12 > 0$

$f''(1) = 12 > 0$

x	$(-\infty;0)$	$(0;\infty)$
$f''(x)$	$+$	$+$

Funkce je v celém definičním oboru pouze konvexní a nemá žádný inflexní bod.

Příklad 5.

Urči intervaly, v nichž je funkce $y = f(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$ konvexní nebo konkávní. Dále určete inflexní body této funkce.

$D(f) = R$

$$f'(x) = \left(-\frac{2x}{1+x^2}\right)' = -\frac{2\cdot(1+x^2) - 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2-2}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4x\cdot(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$$

$$\frac{4x\cdot(3-x^2)}{(1+x^2)^3} = 0$$

$4x \cdot \left(3 - x^2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = \sqrt{3}; x_3 = -\sqrt{3}$

Inflexe může nastat v bodech $x_1 = 0; x_2 = \sqrt{3}; x_3 = -\sqrt{3}$

x	$\left(-\infty; -\sqrt{3}\right)$	$\left(-\sqrt{3}; 0\right)$	$\left(0; \sqrt{3}\right)$	$\left(\sqrt{3}; \infty\right)$
$f''(x)$	+	–	+	–

Funkce je konvexní v intervalech $\left(-\infty; \sqrt{3}\right\rangle$ a $\left\langle 0; \sqrt{3}\right\rangle$, konkávní v intervalech $\left\langle -\sqrt{3}; 0\right\rangle$ a $\left\langle \sqrt{3}; +\infty\right)$. Inflexní body jsou $x_1 = 0; x_2 = \sqrt{3}; x_3 = -\sqrt{3}$.

Použitá literatura

Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990.
Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
Beran, L. – Ondráčková, I.: Prověřte si své matematické nadání. SNTL Praha 1988.
Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.
Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS 2002.
Jirásek F. – Horák S.: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU. Prométheus 2006.