INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

SEMINÁŘ Z MATEMATIKY 3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

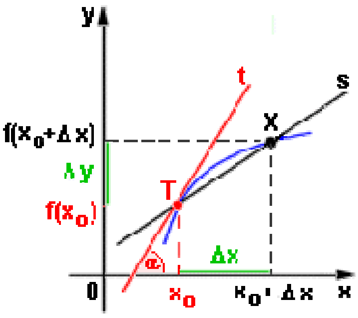
Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru SMAT_3_Literatura.

Derivace funkce

Definice:

Derivace

Derivace funkce geometricky představuje směrnici tečny funkce v bodě. Tečna je určena bodem $T[x_0; f(x_0)]$ a směrnicí $k = f'(x_0)$. Rovnice tečny je $t: y - f(x_0) = k(x - x_0)$.



Na obrázku vidíme část grafu (modře) $y = f(x)$, tečnu *t* (červeně) v dotykovém bodě $T[x_0; f(x_0)]$, dále sečnu *s* (černě) určenou tímto bodem *T* a $X[x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$.
Ze sečny *s* se stane tečna v okamžiku, kdy bod *X* přejde po části grafu $y = f(x)$ do bodu *T*.
Pro směrnici tečny platí: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Tuto limitu nazýváme derivací funkce v bodě - $f'(x_0)$ a píšeme $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
Má-li funkce $y = f(x)$ v každém bodě jisté množiny *M* derivaci $f'(x)$, pak má funkce $y = f(x)$ derivaci na množině *M*.

Derivace a spojitost

Má-li funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 derivaci, pak je v tomto bodě spojitá. Obrácená věta neplatí.
Jsou tyto možnosti:

- graf funkce nemá v bodě x_0 tečnu
- tečna grafu funkce v bodě x_0 je rovnoběžná s osou *y*

Derivace elementárních funkcí:

Funkce	Její derivace	pro každé $x \in$
$y = x^n \quad (n \in Z^+)$	$y' = nx^{n-1}$	$(-\infty; +\infty)$
$y = x^k \quad (k \in Z)$	$y' = kx^{k-1}$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
$y = x^r \quad (r \in R)$	$y' = rx^{r-1}$	$(0; +\infty)$
$y = c$	$y' = 0$	$(-\infty; +\infty)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$(-\infty; +\infty)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$(-\infty; +\infty)$
$y = tgx$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(-\infty; +\infty)$, $x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in Z$
$y = \cot gx$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(-\infty; +\infty)$, $x \neq k\pi$, $k \in Z$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$(-\infty; +\infty)$

$y = a^x \quad a > 0, a \neq 1$	$y' = a^x \ln a$	$(-\infty; +\infty)$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$(0; +\infty)$
$y = \log_a x, \; a > 0, a \neq 1$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(0; +\infty)$

Věty o počítání derivací:
Mají-li funkce $f(x), g(x)$ v bodě x_0 derivaci, pak má v tomto bodě derivaci i jejich součet, rozdíl, součin, podíl $g(x_0) \neq 0$.

$$[f(x_0) + g(x_0)]' = f'(x_0) + g'(x_0) \qquad [f(x_0) \cdot g(x_0)]' = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

$$[f(x_0) - g(x_0)]' = f'(x_0) - g'(x_0) \qquad \left[\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right]' = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Derivace složené funkce:
Nechť funkce φ má derivaci a funkce f má derivaci v bodě $u_0 = f(x_0)$. Pak složená funkce $F : y = f[\varphi(x)]$ má v bodě x_0 derivaci a platí: $F'(x_0) = f'(u_0) \cdot \varphi'(x_0)$.

Řešené příklady:

Příklad 1.
Určete derivaci funkcí:

$y = \sin 2x \qquad y' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$

$y = \sin^3 x^5 \qquad y' = 3 \cdot \sin^2 x^5 \cdot \cos x^5 \cdot 5x^4 = 15x^4 \cdot \sin^2 x^5 \cdot \cos x^5$

Příklad 2.
Určete derivaci funkce $y = x^4 \cdot 4^x$:

$y' = 4x^3 \cdot 4^x + x^4 \cdot 4^x \cdot \ln 4 = x^3 \cdot 4^x \cdot (4 + x \cdot \ln 4)$

Příklad 3.
Určete derivaci funkce $y = e^{3\cos x}$:

$y' = e^{3\cos x} \cdot (-3\sin x) = -3\sin x \cdot e^{3\cos x}$

Příklad 4.
Určete první derivaci funkce:

$y = \sin^4(3x^2 + x + 5)$

$y = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

$y = \cos(3x^2 + x + 5)^3$

$y = \ln^6(3x^2 + x + 5)$

$y = tg^4(3x^2 + x + 5)$

$$y' = \left[\sin^4\left(3x^2 + x + 5\right)\right]' = 4\sin^3\left(3x^2 + x + 5\right)\cdot\left[\sin\left(3x^2 + x + 5\right)\right]' = 4\sin^3\left(3x^2 + x + 5\right)\cdot\cos\left(3x^2 + x + 5\right)\cdot(6x+1)$$

$$y' = \left[\sin^2 x\cdot\cos^2 x\right]' = 2\sin x\cos x\cdot\cos^2 x + \sin^2 x\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x) = 2\sin x\cdot\cos^3 x - 2\sin^3 x\cdot\cos x$$

$$y' = \left[\cos\left(3x^2 + x + 5\right)^3\right]' = -\sin\left(3x^2 + x + 5\right)^3\cdot 3\left(3x^2 + x + 5\right)^2\cdot(6x+1) =$$

$$-3\sin\left(3x^2 + x + 5\right)^3\cdot\left(3x^2 + x + 5\right)^2\cdot(6x+1)$$

$$y' = \left[\ln^6\left(3x^2 + x + 5\right)\right]' = 6\cdot\ln^5\left(3x^2 + x + 5\right)\cdot\frac{1}{\left(3x^2 + x + 5\right)}\cdot(6x+1)$$

$$y' = \left[tg^4\left(3x^2 + x + 5\right)\right]' = 4\cdot tg^3\left(3x^2 + x + 5\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(3x^2 + x + 5\right)}\cdot(6x+1)$$

Příklad 5.
Určete první derivaci funkce:

$$y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$$

$$y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x} = \left(1 + \cos^2 x\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$y' = \left[\left(1 + \cos^2 x\right)^{\frac{1}{4}}\right]' = \frac{1}{4}\cdot\left(1 + \cos^2 x\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(1 + \cos^2 x\right)' = \frac{1}{4}\cdot\left(1 + \cos^2 x\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot 2\cos x\cdot(-\sin x) =$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\sqrt[4]{\left(1 + \cos^2 x\right)^3}} = -\frac{\sin 2x}{4\cdot\sqrt[4]{\left(1 + \cos^2 x\right)^3}}$$

Příklad 6.
Určete první derivaci funkce:

$$y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$$

$$y' = \left[\frac{\cos x}{2\sin^2 x}\right]' = \frac{-\sin x\cdot 2\sin^2 x - \cos x\cdot\left(2\sin^2 x\right)'}{4\sin^4 x} = \frac{-\sin x\cdot 2\sin^2 x - \cos x\cdot 2\cdot 2\sin x\cos x}{4\sin^4 x} =$$

$$\frac{-2\sin^3 x - 4\cos^2 x\cdot\sin x}{4\sin^4 x} = \frac{-2\sin x\cdot\left(\sin^2 x + 2\cos^2 x\right)}{4\sin^4 x} = -\frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{2\sin^3 x} = -\frac{1 + \cos^2 x}{2\sin^3 x}$$

Použitá literatura

Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990.
Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
Beran, L. – Ondráčková, I.: Prověřte si své matematické nadání. SNTL Praha 1988.
Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.
Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS 2002.
Jirásek F. – Horák S.: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU. Prométheus 2006.