INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

SEMINÁŘ Z MATEMATIKY 3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru SMAT_3_Literatura.

Monotónnost, extrémy funkce

Definice:

Monotónnost a derivace

Funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a;b\rangle$ a má v každém bodě intervalu $(a;b)$ derivaci. Pak platí:
funkce $f(x)$ je konstantní na intervalu $\langle a;b\rangle$ právě tehdy, když $f'(x)=0$ pro všechna $x\in(a;b)$
funkce $f(x)$ je neklesající na intervalu $\langle a;b\rangle$ právě tehdy, když $f'(x)\geq 0$ pro všechna $x\in(a;b)$
funkce $f(x)$ je nerostoucí na intervalu $\langle a;b\rangle$ právě tehdy, když $f'(x)\leq 0$ pro všechna $x\in(a;b)$
funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu $\langle a;b\rangle$ právě tehdy, když $f'(x)>0$ pro všechna $x\in(a;b)$
funkce $f(x)$ je klesající na intervalu $\langle a;b\rangle$ právě tehdy, když $f'(x)<0$ pro všechna $x\in(a;b)$

Lokální extrémy funkce:

Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0\in D(f)$ lokální minimum tehdy a jen tehdy, existuje-li takové δ-okolí bodu x_0, že pro všechna x z tohoto okolí platí $f(x)>f(x_0)$.
Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0\in D(f)$ lokální maximum tehdy a jen tehdy, existuje-li takové δ-okolí bodu x_0, že pro všechna x z tohoto okolí platí $f(x)<f(x_0)$.

Nutná podmínka pro existenci lokálního extrému:

Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém, pak buď derivace $f'(x_0)$ neexistuje, nebo existuje-li, je $f'(x_0)=0$.

První postačující podmínka existence lokálního extrému:

Nechť je funkce $f(x)$ v bodě x_0 spojitá a x_0 je bod, ve kterém může nastat lokální extrém. Potom:

- existuje-li takové δ-okolí bodu x_0, že $f'(x)>0$ pro levé δ-okolí bodu x_0 a $f'(x)<0$ pro pravé δ-okolí bodu x_0, pak má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální maximum.
- existuje-li takové δ-okolí bodu x_0, že $f'(x)<0$ pro levé δ-okolí bodu x_0 a $f'(x)>0$ pro pravé δ-okolí bodu x_0, pak má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální minimum.

Postup (dle 1 postačující podmínky existence lokálního extrému):

1) Určíme $D(f)$.
2) Určíme $f'(x)$.
3) Položíme $f'(x)=0$ a rovnici vyřešíme.
4) Určíme body, ve kterých mohou nastat extrémy.
5) Sestavíme tabulku, do které zapíšeme znaménka $f'(x)$ pro jednotlivé intervaly. Zjistíme je prostřednictvím pomocných výpočtů.
6) Na základě předchozích zjištění formulujeme závěr.

Druhá postačující podmínka existence lokálního extrému:

Nechť $f'(x_0)=0$ a nechť v bodě x_0 existuje druhá derivace $f''(x_0)$.
Je-li $f''(x_0)>0$, pak má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální minimum.
Je-li $f''(x_0)<0$, pak má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální maximum.

Postup při určování globálních extrémů

1) Na intervalu $(a;b)$ nalezneme body, v nichž funkce nabývá lokálních extrémů.
2) K nim přidáme krajní body intervalu a získáme množinu bodů podezřelých.
3) Pro všechny podezřelé body určíme funkční hodnoty studované funkce a seřadíme je podle velikosti.

4) V bodě(bodech), v němž je funkční hodnota největší, nabývá funkce na daném intervalu globálního maxima, v bodě (bodech), v němž je funkční hodnota nejmenší, globálního minima.

Řešené příklady:

Příklad 1.
Zjistěte, zda má funkce $y = f(x) = x^3$ v bodě $x_0 = 0$ lokální extrém

Zjistíme, zda v bodě $x_0 = 0$ může nastat lokální extrém:

Funkce $y = f(x) = x^3$ má první derivaci $3x^2$. V bodě $x_0 = 0$ je derivace $3x^2 = 0$. Protože $f'(0) = 0$, může v bodě $x_0 = 0$ nastat lokální extrém.

Nyní vyřešíme δ-okolí bodu $x_0 = 0$:

Pro $x > 0$ je $f(x) = x^3 \Rightarrow f(x) > 0$

Pro $x < 0$ je $f(x) = x^3 \Rightarrow f(x) < 0$

V δ-okolí bodu $x_0 = 0$ pro $x \neq 0$ neplatí $f(x) > f(x_0)$ ani $f(x) < f(x_0)$. Tedy funkce nemá v bodě $x_0 = 0$ lokální extrém.

Příklad 2.
Zjistěte, zda má funkce $y = f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$ lokální extrém

Zjistíme, zda v bodě $x_0 = 0$ může nastat lokální extrém:

Protože $f'(0)$ neexistuje, může v bodě $x_0 = 0$ nastat lokální extrém.

Nyní vyřešíme δ-okolí bodu $x_0 = 0$:

Pro $x > 0$ je $f(x) = |x| = x \Rightarrow f(x) > 0$

Pro $x < 0$ je $f(x) = |x| = -x \Rightarrow f(x) > 0$

V δ-okolí bodu $x_0 = 0$ je $f(x) > f(x_0)$, pro $x \neq 0$. Tedy funkce $y = f(x) = |x|$ nabývá v bodě $x_0 = 0$ lokálního minima.

Příklad 3.
Najdi lokální extrémy funkce $y = f(x) = x^4 - 2x^2$

Postup (dle 1 postačující podmínky existence lokálního extrému):

1) Určíme $D(f)$.
2) Určíme $f'(x)$.
3) Položíme $f'(x) = 0$ a rovnici vyřešíme.
4) Určíme body, ve kterých mohou nastat extrémy.
5) Sestavíme tabulku, do které zapíšeme znaménka $f'(x)$ pro jednotlivé intervaly. Zjistíme je prostřednictvím pomocných výpočtů.
6) Na základě předchozích zjištění formulujeme závěr.

$D(f) = R$, funkce je spojitá každém bodě.

$$f'(x) = \left[x^4 - 2x^2\right]' = 4x^3 - 4x$$

$$4x^3 - 4x = 0$$

$$4 \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$$

Extrém může nastat v bodech: $0, -1, 1$

Pomocné výpočty:

$f'(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) = -24 < 0$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1{,}5 > 0$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -1{,}5 < 0$

$f'(3) = 4 \cdot (3)^3 - 4 \cdot 3 = 108 - 12 = 96 > 0$

x	$(-\infty;-1)$	$(-1;0)$	$(0;1)$	$(1;\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

v bodě $x = -1$ nastane lokální minimum
v bodě $x = 0$ nastane lokální maximum
v bodě $x = 1$ nastane lokální minimum

Příklad 4.

Najdi lokální extrémy funkce $y = f(x) = (x-1)^2$

$D(f) = R$, funkce je spojitá každém bodě definičního oboru.

$f'(x) = \left[(x-1)^2\right]' = 2 \cdot (x-1) = 2x - 2$

$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

extrém může nastat v bodě 1
pomocné výpočty:

$f'(-2) = -4 - 2 = -6 < 0$

$f'(2) = 4 - 2 = 2 > 0$

x	$(-\infty;1)$	$(1;\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$

funkce má lokální minimum
Pozn. jde o kvadratickou funkci, vrchol leží v bodě $[1;0]$

Příklad 5.

Najdi lokální extrémy funkce $y = f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$

$D(f) = R$, funkce je spojitá v každém bodě definičního oboru.

$f'(x) = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2\right]' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - \frac{2}{3} \cdot 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot 2x = x^3 - 2x^2 - 3x$

$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$

$x \cdot (x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 3$

extrémy mohou nastat v bodech $-1; 0; 3$
pomocné výpočty:

$f'(-2) = (-2)^3 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) = -8 - 8 + 6 = -10 < 0$

$f'(-0{,}5) = -\frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{7}{8} > 0$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}-\frac{2}{4}-\frac{3}{2}=-\frac{15}{8}<0$

$f'(2.5)=-4{,}375<0$

$f'(4)=64-32-12=20>0$

x	$(-\infty;-1)$	$(-1;0)$	$(0;3)$	$(3;\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

v bodě $x=-1$ nastane lokální minimum
v bodě $x=0$ nastane lokální maximum
v bodě $x=3$ nastane lokální minimum

Příklad 6.

Najděte lokální extrémy funkce $y=f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x+11$

Postup (dle 2. postačující podmínky existence lokálního extrému):

1) Určíme $D(f)$
2) Určíme $f'(x)$
3) Položíme $f'(x)=0$ a rovnici vyřešíme.
4) Určíme body, ve kterých mohou nastat extrémy.
5) Určíme $f''(x)$. Za x postupně dosazujeme všechny hodnoty, ve kterých mohou nastat extrémy. Vypočtené hodnoty porovnáme s nulou
6) Na základě předchozích zjištění formulujeme závěr.

$D(f)=R$, funkce je spojitá každém bodě definičního oboru.

$f'(x)=\left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x+11\right]'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-2x-3+0=x^2-2x-3$

$x^2-2x-3=0\Rightarrow x_1=3; x_2=-1$

$f''(x)=\left(x^2-2x-3\right)'=2x-2$

$f''(3)=6-2=4>0$

$f''(-1)=-2-2=-4<0$

Funkce má v bodě -1 lokální maximum.
Funkce má v bodě 3 lokální minimum.

Použitá literatura

Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990.
Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
Beran, L. – Ondráčková, I.: Prověřte si své matematické nadání. SNTL Praha 1988.
Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.
Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS 2002.
Jirásek F. – Horák S.: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU. Prométheus 2006.