INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

SEMINÁŘ Z MATEMATIKY 3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

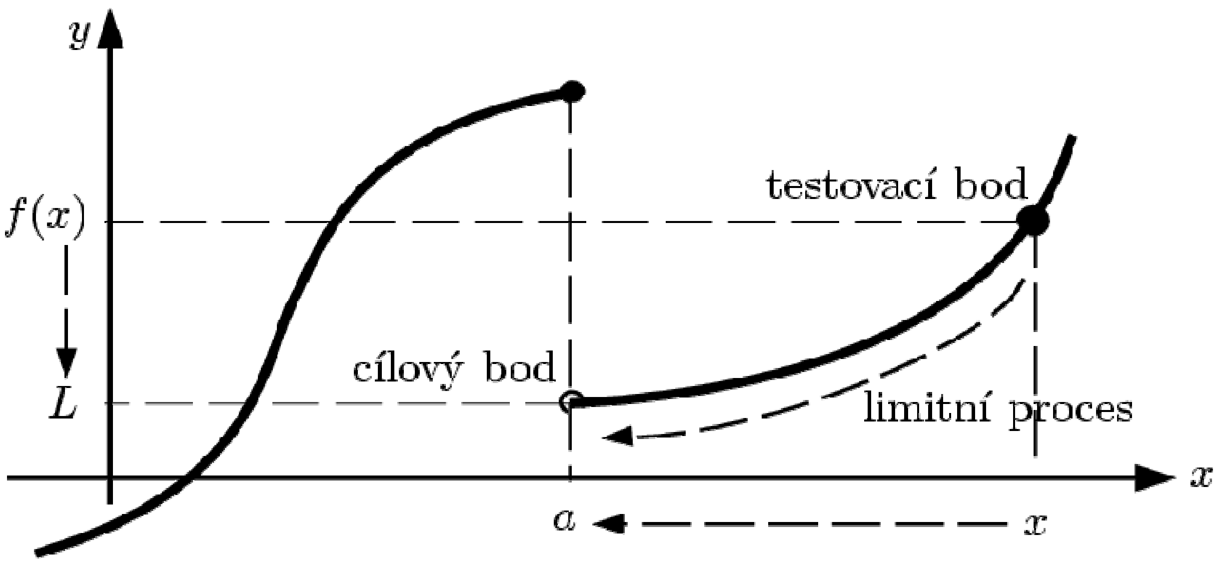
Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru SMAT_3_Literatura.

Limita funkce, spojitost

Definice:

<u>Definice okolí</u>. Okolím bodu $a \in R$ nazýváme libovolný otevřený interval, který ve svém vnitřku obsahuje bod *a*, značíme *O(a)*. Ryzím (též prstencovým) okolím bodu *a* rozumíme množinu $O(a)-\{a\}$, značíme *O(a)*. Okolím bodu ∞ rozumíme libovolný interval tvaru $(A;+\infty)$, kde *A* je reálné číslo a okolím bodu $-\infty$ interval $(-\infty;A)$. Ryzím okolím nevlastních bodů rozumíme totéž, co okolím těchto bodů.
<u>Limita funkce</u>. Nechť $a,L \in R^+$ a $f:R \to R$. Nechť je funkce *f* definovaná v nějakém ryzím okolí bodu *a*. Řekneme, že funkce *f* má v bodě *a* limitu rovnu číslu *L*, jestliže ke každému okolí *O(L)* bodu *L* existuje ryzí okolí *O(a)* bodu *a* takové, že pro libovolné $x \in O(a)$ je $f(x) \in O(L)$.
Píšeme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ nebo $f(x) \to L$ pro $x \to a$
<u>Vlastní a nevlastní limita</u>. Pokud $L \in R$, nazývá se limita vlastní, pokud $L \in \{-\infty;+\infty\}$ jedná se o limitu nevlastní.
<u>Definice limity</u>. Nechť $a, L \in R$ a $f:R \to R$. Řekneme, že funkce f má v bodě *a* limitu rovnu číslu *L*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolné $x \in (a-\delta; a+\delta)$, $x \neq a$ platí $f(x) \in (L-\varepsilon; L+\varepsilon)$.
Bude-li $a \in R^+$ a nahradíme-li ve výše uvedené definici neúplné okolí $O(a)$ pravým okolím $O^+(a)$, obdržíme definici ***<u>limity zprava</u>*** funkce *f* v bodě *a*. Podobně, nahradíme-li $O(a)$ levým okolím $O^-(a)$, získáme definici ***<u>limity zleva</u>*** funkce *f* v bodě *a*. Tyto limity značíme $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$



Limitní proces $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = L$

Věta o limitě součtu. rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$$

<u>Spojitost funkce</u>.

Funkce f je spojitá v bodě $a\in D(f)$, je-li $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$. Nahradíme-li tuto limitu limitou zprava (respektive zleva), získáme definici spojitosti zprava (respektive spojitosti zleva) funkce *f* v bodě *a*. Funkce *f* se nazývá spojitá na intervalu *I*, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě *I*, spojitá zprava v levém krajním bodě *I* (patří-li tento bod do *I*) a spojitá zleva v pravém krajním bodě *I* (patří-li tento bod do *I*).Všechny elementární funkce jsou spojité na každém intervalu, který je částí jejich definičního oboru.

<u>Věta o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí</u>:

Součet, rozdíl a součin funkcí spojitých na intervalu *I* je opět spojitou funkcí na *I*. Podíl dvou spojitých funkcí na intervalu I je spojitou funkcí na *I* za předpokladu, že funkce ve jmenovateli je nenulová ve všech bodech $x\in I$.

<u>Věta o spojitosti složené funkce</u>:

Nechť $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, $\lim\limits_{y\to b}g(y)=L$ a existuje ryzí okolí *O(a)* takové, že pro $x\in O(a)$ je $f(x)\neq b$.

Potom $\lim\limits_{x\to a}g(f(x))=L$.

Známé limity:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to0-}\frac{1}{x}=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to0+}\frac{1}{x}=\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\,neex$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty\ a\in(0,1)$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0\ a\in(0,1)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0\ a\in(1,+\infty)$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty\ a\in(1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x\ neex$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\sin x\ neex$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x\ neex$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\cos x\ neex$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2-}}tgx=+\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2+}}tgx=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to0-}\cot gx=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to0+}\cot gx=+\infty$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx}{x}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ $\quad\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to0+}\log_x a=+\infty$, je-li $a\in(0;1)$ $\quad\lim\limits_{x\to0+}\log_x a=-\infty$, je-li $a\in(1;+\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\log_x a=-\infty$, je-li $a\in(0;1)$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\log_x a=+\infty$, je-li $a\in(1;+\infty)$

$\lim\limits_{x\to0+}\ln x=-\infty$ $\quad\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

Řešené příklady:

Vypočtěte limity funkcí, pokud existují:

$$\lim_{x\to0}(\sin x)=0$$

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^2-1}{x+1}\right)=\lim_{x\to-1}\left(\frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x+1}\right)=-2$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-3x+1}{x-2}=\frac{(-1)^3-3\cdot(-1)+1}{-1-2}=\frac{-1+3+1}{-3}=-1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x^5-2x^2+2\right)=\lim_{x\to\infty}2x^5\cdot\left(1-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^4-x^2+5\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^4\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^4}\right)\right)=\infty\cdot 1=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-1}+\frac{x}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x-1}+\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2-\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{2}+\frac{1}{1}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-2}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2-2}+x}{\sqrt{x^2-2}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-2}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2-2}+x}=\frac{-2}{\infty+\infty}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{-\frac{1}{3}}{1}=-\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^2\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^2\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x-\sin x\cdot\cos x}{\cos x}}{x^2\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cdot\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2\cdot\cos x\cdot(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x\cdot(1+\cos x)}\right)=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2-\sqrt{2x}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2-\sqrt{2x}}\cdot\frac{2+\sqrt{2x}}{2+\sqrt{2x}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cdot(x-2)\cdot\left(2+\sqrt{2x}\right)}{4-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cdot(x-2)\cdot\left(2+\sqrt{2x}\right)}{(-2)\cdot(x-2)}=$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(2+2)\cdot\left(2+\sqrt{4}\right)=-8$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x+1}-e}{\sin 2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e\cdot\left(e^x-1\right)}{\sin 2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e\cdot\left(e^x-1\right)}{2x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{e}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{3x}-\frac{3}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{3}\right)-\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2+1}=\frac{2}{3}-3=-\frac{7}{3}$$

Použitá literatura

Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990.
Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
Beran, L. – Ondráčková, I.: Prověřte si své matematické nadání. SNTL Praha 1988.
Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.
Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS 2002.
Jirásek F. – Horák S.: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU. Prométheus 2006.