I N V E S T I C E D O R O Z V O J E V Z D Ě L Á V Á N Í

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

SEMINÁŘ Z MATEMATIKY 3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru SMAT_3_Literatura.

Asymptoty grafu funkce, vyšetření průběhu a sestrojení grafu funkce

Definice:

Mějme funkci $f(x)$, jejíž definiční obor obsahuje nějaký interval $\langle a;+\infty)$, resp. $(-\infty;a\rangle$.
Říkáme, že přímka $y=kx+q$ je asymptotou grafu funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$, resp. $-\infty$, jestliže platí:
$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(kx+q)]=0$, resp. $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(kx+q)]=0$
Asymptota o rovnici $y=kx+q$ grafu funkce $f(x)$ existuje právě tehdy, když existují limity:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k$$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=q \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=q$$

Řešené příklady:

Příklad 1.

Urči asymptoty ke grafu funkce $y=f(x)=\dfrac{2x^2}{2x-1}$

Postup:

1) Určíme $D(f)$.
2) Určíme rovnici asymptoty bez směrnice.
3) Určíme rovnici asymptoty se směrnicí.

$$D(f)=R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$a_1: x=\frac{1}{2}$$

$$a_2: y=kx+q$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{(2x-1)\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{2-\frac{1}{x}}=1$$

$$q=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2}{2x-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x^2+x}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x-1}=\frac{1}{2}$$

$$a_2: y=x+\frac{1}{2}$$

Příklad 2.

Urči asymptoty ke grafu funkce $y=f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x}$

$$D(f)=R-\{0\}$$

$$a_1: y=0$$

$$a_2: y=kx+q$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2}=2$$

$$q=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2+3}{x}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}=0$$

$$a_2: y=2x$$

Příklad 3.

Urči asymptoty ke grafu funkce $y=f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+2}$

$$D(f)=R-\{-2\}$$

$$a_1: x=-2$$

$$a_2: y=kx+q$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+3}{x+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}=1$$

$$q=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+3}{x+2}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3-2x}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(\frac{3}{x}-2\right)}{x\cdot\left(1+\frac{2}{x}\right)}=-2$$

$$a_2: y=x-2$$

Příklad 4.

Vyšetřete průběh funkce $y=f(x)=x^3+\dfrac{x^4}{4}$ a graf nakreslete.

Postup:

1) Určíme $D(f)$.
2) Určíme body nespojitosti.
3) Určíme průsečíky s osami souřadného systému.
4) Určíme stacionární body.
5) Určíme intervaly, v nichž je funkce rostoucí, resp. klesající.
6) Určíme charakter stacionárních bodů.
7) Určíme intervaly, v nichž je funkce konkávní, resp. konvexní.
8) Určíme inflexní body.
9) Určíme asymptoty.
10) Určíme další vlastnosti funkce.
11) Určíme několik bodů $[x;\ f(x)]$, které leží na grafu funkce.
12) Graf sestrojíme.
13) Určíme $H(f)$.

$$D(f)=R$$

Body nespojitosti nejsou

Průsečík s osou $x \Rightarrow y=0$

$$x^3+\frac{x^4}{4}=0$$

$$4x^3+x^4=0$$

$$x^3\cdot(4+x)=0 \Rightarrow x_1=0;\ x_2=-4$$

$P_{x1} = [0; 0]; P_{x2} = [-4; 0]$

Průsečík s osou $y \Rightarrow x = 0$

$y = 0^3 + \frac{0^4}{4} = 0$

$P_y = [0; 0]$

$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = 3x^2 + x^3$

$3x^2 + x^3 = 0$

$x^2 \cdot (3 + x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -3$

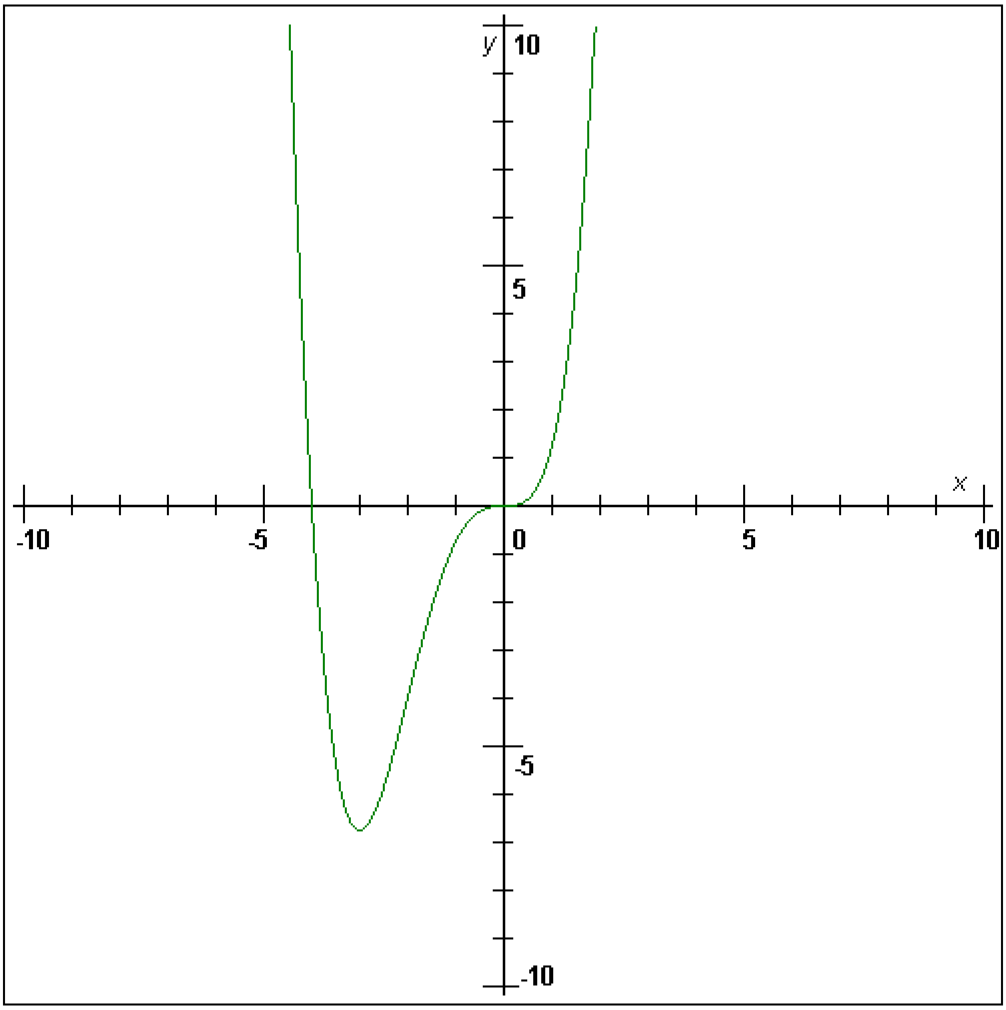
Funkce je klesající v intervalu $(-\infty; -3)$ a rostoucí v $(-3; \infty)$

$f''(x) = 6x + 3x^2$

$f''(0) = 0$, extrém zde nenastane

$f''(-3) = -18 + 27 = 9 > 0$, v bodě -3 nastane lokální minimum, $f(-3) = -6.75$

$f''(0) = 0$, v bodě 0 nastane inflexe $\Rightarrow X[0;0]$



$H(f) = \langle -6,75; +\infty)$

Příklad 5.

Vyšetřete průběh funkce: $f(x): y = (x+1) \cdot (x-2)^2$

$D(f) = R$

Body nespojitosti nejsou

Průsečíky s osou x:

$(x+1)\cdot(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 2$

$P_{x1} = [-1; 0]; P_{x2} = [2; 0]$

Průsečíky s osou y:

$(0+1)\cdot(0-2)^2 = 4$

$P_y = [0; 4]$

$f'(x) = 1\cdot(x-2)^2 + (x+1)\cdot 2\cdot(x-2) = (x-2)^2 + 2x^2 - 2x - 4 = x^2 - 4x + 4 + 2x^2 - 2x - 4 = 3x^2 - 6x$

$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$

Extrém může nastat v bodě 0 a 2

x	$(-\infty;0)$	$(0;2)$	$(2;\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

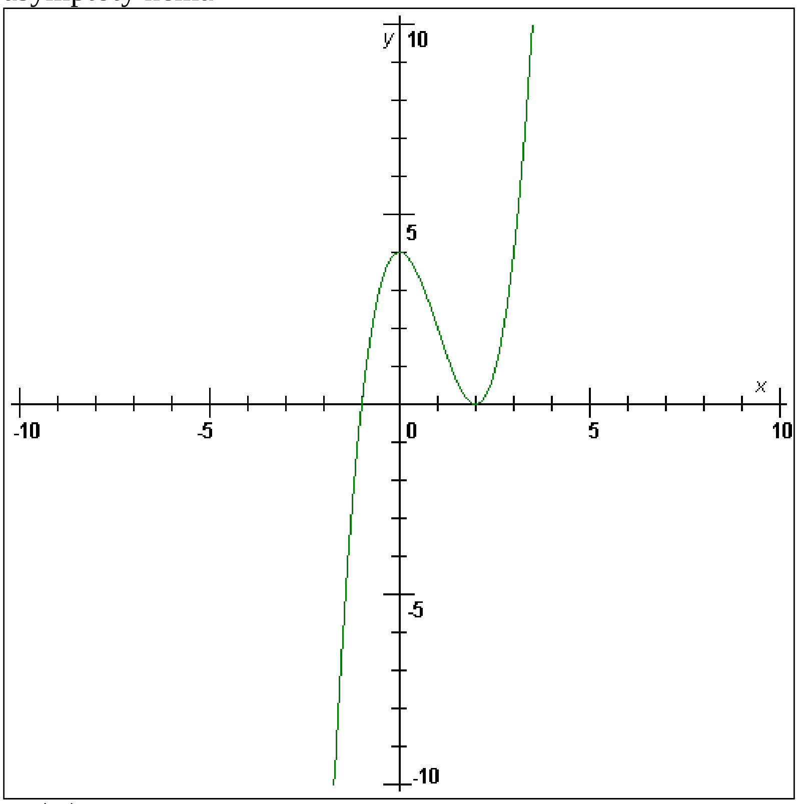
$f''(x) = 6x - 6$

$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ v bodě nastane lokální maximum.

$f''(2) = 12 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow$ v bodě 2 nastane lokální minimum.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\cdot(x-2)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\cdot\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3}\right)}{x} = \infty$$

asymptoty nemá



$H(f) = R$

Použitá literatura

Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990.
Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
Beran, L. – Ondráčková, I.: Prověřte si své matematické nadání. SNTL Praha 1988.
Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.
Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS 2002.
Jirásek F. – Horák S.: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU. Prométheus 2006.