I N V E S T I C E   D O   R O Z V O J E   V Z D Ě L Á V Á N Í

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

SEMINÁŘ Z MATEMATIKY 3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru SMAT_3_Literatura.

Komplexní čísla II

Definice:

Absolutní hodnota komplexního čísla.
Je vzdálenost jeho obrazu od počátku soustavy souřadnic v rovině komplexních čísel.
K označení absolutní hodnoty užíváme symbolu $|a|$.

$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ - je vždy nezáporné číslo.

Komplexní číslo, pro které platí $|a| = 1$ se nazývá komplexní jednotka.

Goniometrický tvar komplexního čísla.

$\cos\varphi = \frac{a_1}{|a|}$ $\sin\varphi = \frac{a_2}{|a|}$ z těchto vztahů plyne: $a_1 = \cos\varphi \cdot |a|, a_2 = \sin\varphi \cdot |a|$

Algebraický tvar komplexního čísla $a = a_1 + a_2 i$ můžeme napsat
$a = |a| \cdot \cos\varphi + |a| \cdot \sin\varphi = |a| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Tento zápis nazýváme goniometrický tvar komplexního čísla.

Moivreova věta

Pro každé $\varphi \in R, n \in N$ platí: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Mocnina komplexního čísla v goniometrickém tvaru je definovaná takto:
$a^n = |a|^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Řešení kvadratických rovnic v oboru komplexních čísel

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ diskriminant $D < 0$

vzorec: $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$

pro neúplnou kvadratickou rovnici (bez lineárního členu) $a^2 + b^2 = (a + bi) \cdot (a - bi)$

Řešené příklady:

Příklad 1.

Jsou dána komplexní čísla $a = -3 + 4i, b = i\sqrt{3}, c = -i, d = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$. Vypočítejte jejich absolutní hodnoty.

Pro řešení využijeme základního vzorce pro výpočet absolutní hodnoty komplexního čísla.

$|a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

$|b| = \sqrt{(\sqrt{3})^2} = \sqrt{3}$

$|c| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$

$|d| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = 1$

Komplexní jednotka je číslo *c* a *d*

Příklad 2.

Určete $\left|\frac{-2+3i}{3-2i}\right|$.

Při výpočtu absolutní hodnoty musíme nejdříve určit podíl 2 komplexních čísel potom již zmíněnou absolutní hodnotu.

$$\frac{-2+3i}{3-2i}=\frac{(-2+3i)\cdot(3+2i)}{(3-2i)\cdot(3+2i)}=\frac{-6+9i-4i+6i^2}{9-4i^2}=\frac{-12+5i}{13}=-\frac{12}{13}+\frac{5}{13}i$$

$$\left|\frac{-2+3i}{3-2i}\right|=\sqrt{\left(-\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2}=1$$

Podíl je zároveň komplexní jednotka.

Příklad 3.

Převeďte tato komplexní čísla na goniometrický tvar:

$a=1+i, b=-1+i, c=1-i$

Tato komplexní čísla znázorníme v Gaussově rovině komplexních čísel čísel a určíme úhel φ, který svírá velikost komplexního čísla s kladnou poloosou x.

$a=1+i$

$|a|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}$

$a=1+i=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$b=-1+i$

$|b|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{3}{4}\pi$

$b=-1+i=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$c=1-i$

$|c|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{7\pi}{4}$

$c=1-i=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

Příklad 4.

Převeďte komplexní číslo z goniometrického tvaru na algebraický: $a=2\cdot\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$

Určíme hodnotu cosinu a sinu úhlu $\frac{11}{6}\pi$ a vypočteme závorku.

$\cos\frac{11}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (úhel leží ve IV. kvadrantu a funkce cos je zde kladná)

$\sin\frac{11}{6}\pi=-\frac{1}{2}$ (úhle leží ve IV. kvadrantu a sin je zde záporný)

$a=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-i$

Příklad 5.

Vypočítejte b^{20} pro $b=1+i$

Pro umocnění komplexního čísla podle Moivreovy věty nejdříve určíme absolutní hodnotu čísla b a určíme úhel φ.

$|b|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}$

$b^{20}=\left(\sqrt{2}\right)^{20}\cdot\left(\cos\frac{20\pi}{4}+i\sin\frac{20\pi}{4}\right)=2^{10}\cdot(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)=2^{10}\cdot(\cos\pi+i\sin\pi)=2^{10}\cdot(-1+i\cdot 0)=$
$=-1024$

Perioda sin a cos je 2π, celkem odečítáme 4π

Příklad 6.

Řešte v množině komplexních čísel kvadratickou rovnici:

$x^2+1=0$

Rovnice nemá v množině R řešení, neboť diskriminant $D=0^2-4\cdot1\cdot1=-4<0$

Rovnici můžeme rozložit podle vzorce: $(x+i)\cdot(x-i)=0$

Existují tedy 2 kořeny: $x_1=i, x_2=-i$

Zkouška:

$L_1=(-i)^2+1=i^2+1=-1+1=0$

$P_1=0$

$L_2=i^2+1=-1+1=0$

$P_2=0$

Příklad 7.

Řešte v množině komplexních čísel kv. rovnici:

$2x^2+2x+3=0$

Určíme diskriminant: $D=2^2-4\cdot2\cdot3=-20<0$

Vypočteme kořeny dle vzorce: $x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{|D|}}{2a}=\frac{-2\pm i\sqrt{20}}{4}=\frac{-2\pm i\cdot2\cdot\sqrt{5}}{4}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}i$

Použitá literatura

Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990.
Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
Beran, L. – Ondráčková, I.: Prověřte si své matematické nadání. SNTL Praha 1988.
Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.
Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS 2002.
Jirásek F. – Horák S.: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU. Prométheus 2006.