INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA 4. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_4_Literatura.

4.3.5 Matice a operace s maticemi

Definice:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & --- & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & --- & a_{2n} \\ ------ & ------ & ------ & ------ \\ a_{m1} & a_{m2} & --- & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matice je schéma složené z čísel uspořádaných do m řádků a n sloupců – matice typu (m, n).
Matici lze rozložit na řádkové a sloupcové vektory.
Čtvercová matice má stejný počet řádků a sloupců.
Nulová matice – každý její prvek je 0, značíme ji O
Jednotková matice – všechny prvky diagonály jsou 1, ostatní prvky jsou 0.
Opačná matice – každý prvek v matici vynásobíme číslem (-1).

Operace s maticemi:

Rovnost 2 matic. Dvě matice $A = [a_{ik}]_m^n, B = [b_{ik}]_m^n$ jsou si rovny právě tehdy, jestliže platí $a_{ik} = b_{ik}$ pro každou dvojici indexů *i, k* (odpovídající prvky obou matic jsou si rovny).

Součet 2 matic. Součtem matic $A = [a_{ik}]_m^n, B = [b_{ik}]_m^n$ se nazývá matice $C = [c_{ik}]_m^n$ pro jejíž prvky platí $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$ pro každou dvojici indexů *i, k* (sečteme odpovídající prvky v obou maticích).

Součin čísla a matice.
Součinem reálného čísla *c* a matice $A = [a_{ik}]_m^n$ je matice $B = [b_{ik}]_m^n$, pro jejíž prvky platí $b_{ik} = c \cdot a_{ik}$ pro každou dvojici indexů *i, k* (každý prvek v matici *A* vynásobíme číslem *c*).

Řešené příklady:

Příklad 1.
Které ze zadaných matic jsou si rovny:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Podle definice musí být obě matice stejného typu a odpovídající si prvky musí být shodné.
Shodné jsou tyto dvojice: $A = C$ a $D = F$.

Příklad 2.
Vypočtěte $A + B, 2 \cdot (A - B), 2A - 3B$, jestliže je dáno:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Obě matice jsou stejného typu, postupujeme podle definice pro sčítání (sčítáme odpovídající prvky), násobení matice číslem (číslem násobíme každý prvek v matici).

$$A+B=\begin{bmatrix}1+0 & 2+1 & 0+0 & 1+2\\ 1+2 & -1+1 & 1+0 & 1+2\\ 2+1 & 0-1 & 2+1 & 3-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0 & 3\\ 3 & 0 & 1 & 3\\ 3 & -1 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$2\cdot(A-B)=2\cdot\begin{bmatrix}1-0 & 2-1 & 0-0 & 1-2\\ 1-2 & -1-1 & 1-0 & 1-2\\ 2-1 & 0+1 & 2-1 & 3+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0 & -2\\ -2 & -4 & 2 & -2\\ 2 & 2 & 2 & 12\end{bmatrix}$$

$$2A-3B=2\cdot\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2 & 3\end{bmatrix}-3\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 2 & 2\\ 4 & 0 & 4 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 3 & 0 & 6\\ 6 & 3 & 0 & 6\\ 3 & -3 & 3 & -9\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & -4\\ -4 & -5 & 2 & -4\\ 1 & 3 & 1 & 15\end{bmatrix}$$

Příklad 3.

Určete matici *X*, pro kterou platí $2X-A=A-4B$, jestliže platí:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 1 & 3 & -2\end{bmatrix}$$

Nejdříve vyřešíme maticovou rovnici pro neznámou matici *X*

$$2X-A = A-4B$$

$$2X = 2A-4B$$

$$X = A-2B$$

Použijeme nyní operace sčítání matic, násobení matice reálným číslem a vypočteme prvky matice *X*:

$$X=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}-2\cdot\begin{bmatrix}0 & -2 & 2\\ 1 & 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & -4 & 4\\ 2 & 6 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 6 & -4\\ 0 & -7 & 7\end{bmatrix}$$

Příklad 4.

Jsou dány matice: $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

Určete matici: a) $D = 2A - 3B + 4C$

b) $F = A - 2B - 2C$

Použijeme nyní operace sčítání matic, násobení matice reálným číslem.

$$D = 2\cdot\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} - 3\cdot\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 4\cdot\begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 8 \\ 2 & 10 & 14 \\ -4 & 6 & 10 \end{bmatrix} -$$

$$-\begin{bmatrix} 12 & -12 & 0 \\ 9 & 9 & -6 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 28 & 16 \\ -4 & 8 & 28 \\ 8 & 20 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 34 & 24 \\ -11 & 9 & 48 \\ 1 & 23 & -2 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 8 & 0 \\ -6 & -6 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} -10 & -14 & -8 \\ 2 & -4 & -14 \\ -4 & -10 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 & -9 & -4 \\ -3 & -5 & -3 \\ -8 & -9 & 11 \end{bmatrix}$$

Použitá literatura

Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.

Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.

Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS Praha 2002.

Huťka V. – Cirjak M.: Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU 7. část. SPN Praha 1986.