



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA 4. ročník

Reg. č. projektu:	CZ.1.07/1.1.10/01.0007
Název projektu:	Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP
Název příjemce:	Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1
Klíčová aktivita:	Využití ICT ve výuce matematiky
Použitá literatura:	Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_4_Literatura.

4.3.11. Soustava lineárních nerovnic řešených pomocí matic

Definice:

Soustava nerovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

kde a_{ik}, b_i ($i = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, n$) jsou reálná čísla a x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) jsou neznámé, nazýváme soustavu m lineárních nerovnic s n neznámými. Čísla a_{ik} nazýváme koeficienty soustavy.

Soustavu nerovnic převedeme na soustavu rovnic přidáním doplňkových proměnných. Dále pak řešíme jako soustavu rovnic pomocí matic.

Příklad:

$$2x_1 - 3x_2 \leq 4$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 8$$

Přidáme doplňkové proměnné tak, že dostaneme na pravé straně rovnost.

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_4 = 8$$

Levá strana první nerovnice byla menší než pravá – přidali jsme $x_3 \geq 0$, abychom dostali rovnost.

Levá strana druhé nerovnice je také menší než pravá – přidali jsme $x_4 \geq 0$, abychom dostali rovnost.

Na každou stranu nerovnic přidáváme jinou doplňkovou proměnnou, protože obě levé strany jsou navzájem různé.

Další postup je stejný jako při řešení soustavy rovnic pomocí matic. Platí i stejné definice (Frobeniova věta, obecné řešení, partikulární řešení, parametrické,...)

Řešené příklady:

Příklad 1.

Řešte soustavu nerovnic:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 + 17x_3 \leq -2$$

Soustavu nerovnic převedeme na soustavu rovnic přidáním doplňkových proměnných.

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 6$$

$$x_1 - x_2 + 17x_3 + x_6 = -2$$

Pro doplňkové proměnné platí: $x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 17 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 20 & -1 & 0 & 1 & -5 \end{array} \right] \approx$$

první řádek jsme opsali
ke druhému řádku jsme přičetli -2 násobek
prvního řádku
ke třetímu řádku jsme přičetli -1 násobek
prvního řádku

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 11 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 & -5 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 52 & -31 & 11 & -52 \\ 0 & 1 & 0 & -33 & 20 & -7 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 & 5 \end{array} \right]$$

k prvnímu řádku jsme přičetli 2 násobek
druhého řádku
druhý řádek jsme vynásobili -1
ke třetímu řádku jsme přičetli -3 násobek
druhého řádku

k prvnímu řádku jsme přičetli 11 násobek
třetího řádku
ke druhému řádku jsme přičetli -7 násobek
třetího řádku
třetí řádek jsme vynásobili -1

Matici přepíšeme na ekvivalentní soustavu rovnic:

$$x_1 + 52x_4 - 31x_5 + 11x_6 = -52 \Rightarrow x_1 = -52 - 52x_4 + 31x_5 - 11x_6$$

$$x_2 - 33x_4 + 20x_5 - 7x_6 = 35 \Rightarrow x_2 = 35 + 33x_4 - 20x_5 + 7x_6$$

$$x_3 - 5x_4 + 3x_5 - x_6 = 5 \Rightarrow x_3 = 5 + 5x_4 - 3x_5 + x_6$$

Toto je obecné řešení s podmínkami $x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$

Partikulární řešení:

(volné proměnné volíme - $x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$) je $x_1 = -52, x_2 = 35, x_3 = 5$

Příklad 2.

Řešte soustavu nerovnic:

$$x_1 - x_2 - 4x_3 > 4$$

$$2x_1 + x_2 - 7x_3 < 5$$

$$3x_1 + x_2 - 10x_3 \leq 0$$

Upravíme soustavu nerovnic tak, aby symboly nerovnosti byly stejné ($<$, \leq nebo $>$, \geq) - první nerovnici vynásobíme -1

$$-x_1 + x_2 + 4x_3 < -4$$

$$2x_1 + x_2 - 7x_3 < 5$$

$$3x_1 + x_2 - 10x_3 \leq 0$$

Zavedeme doplňkové proměnné, určíme pro ně podmínky a sestavíme soustavu rovnic.

$$-x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = -4 \quad x_4 > 0, \quad x_5 > 0, \quad x_6 \geq 0$$

$$2x_1 + x_2 - 7x_3 + x_5 = 5$$

$$3x_1 + x_2 - 10x_3 + x_6 = 0$$

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccccc|c} -1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -7 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -10 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & -4 & -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 & 1 & -12 \end{array} \right] \approx$$

první řádek jsme vynásobili -1
ke druhému řádku jsme přičetli 2 násobek
prvního řádku
ke třetímu řádku jsme přičetli 3 násobek
prvního řádku

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 11 & 0 & 7 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -2 & 1 & -6 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1,5 & -7 & 5,5 & -41 \\ 0 & 0 & 1 & 0,5 & -2 & 1,5 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 0,5 & 1 & -0,5 & 3 \end{array} \right]$$

k prvnímu řádku jsme přičetli 4 násobek
druhého řádku
druhý řádek jsme opsali
ke třetímu řádku jsme přičetli -2 násobek
druhého řádku

k prvnímu řádku jsme přičetli 5,5 násobek
třetího řádku
ke 2 násobku druhého řádku jsme přičetli 3
násobek třetího řádku a výsledek vydělili 2
třetí řádek jsme vydělili -2

Obecné řešení:

$$x_1 = -41 - \frac{3}{2}x_4 + 7x_5 - \frac{11}{2}x_6$$

$$x_2 = 3 - \frac{1}{2}x_4 - x_5 + \frac{1}{2}x_6$$

$$x_3 = -12 - \frac{1}{2}x_4 + 2x_5 - \frac{3}{2}x_6$$

Příklad 3.

Řešte soustavu nerovnic:

$$x_1 - 2x_2 < -4$$

$$x_1 - 3x_2 > 3$$

První nerovnici vynásobíme -1 , nadefinujeme doplňkové proměnné a převedeme na soustavu rovnic.

$$-x_1 + 2x_2 > 4$$

$$x_1 - 3x_2 > 3$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \quad \text{Podmínky: } x_3 < 0, x_4 < 0$$

$$x_1 - 3x_2 + x_4 = 3$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 7 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 3 & 2 & 18 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -7 \end{array} \right]$$

první řádek jsme opsali
ke 2. řádku jsme přičetli 1. řádek

k prvnímu řádku jsme přičetli 2 násobek
2. řádku
2. řádek jsme vynásobili -1

Obecné řešení:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_3 + 2x_4 - 18 \\ x_2 &= -7 + x_3 + x_4 \end{aligned} \quad x_3 < 0, x_4 < 0$$

Příklad 4.

Řešte soustavu nerovnic:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ 2x_1 - 5x_2 &\leq 5 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{Obě nerovnosti v soustavě nerovnic jsou souhlasné, tudíž} \\ \text{nemusíme nerovnice upravovat. Nadefinujeme doplňkové} \\ \text{proměnné a převedeme na rovnice.} \end{array}$$

$$x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \quad \text{Podmínky: } x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

$$2x_1 - 5x_2 + x_4 = 5$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & -5 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -7 \end{array} \right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -5 & 3 & -15 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -7 \end{array} \right]$$

první řádek jsme opsali
ke 2. řádku jsme přičetli -2 násobek
prvního řádku

k prvnímu řádku jsme přičetli 3 násobek
druhého řádku
2. řádek jsme opsali

Obecné řešení:

$$\begin{aligned} x_1 &= -15 + 5x_3 - 3x_4 \\ x_2 &= -7 + 2x_3 - x_4 \end{aligned}$$

Použitá literatura

Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.

Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.

Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS Praha 2002.

Huťka V. – Cirjak M.: Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU 7. část.

SPN Praha 1986.