I N V E S T I C E   D O   R O Z V O J E   V Z D Ě L Á V Á N Í

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA 4. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_4_Literatura.

4.3.7 Matice – násobení matic, hodnost matice, inverzní matice

Definice:

Součin dvou matic:
V podstatě jde o skalární součin řádkového vektoru první matice se sloupcovým vektorem druhé matice. Tento výsledek se pak zapíše na pozici ve výsledné matici, jejíž index odpovídá číslu řádku první matice a číslu sloupce druhé matice. Nemůžeme spolu násobit libovolné 2 matice, musí být určitého typu - $A_{(m,n)} \cdot B_{(n,p)} = C_{(m,p)}$. Násobení matic není komutativní.

Hodnost matice:
Hodnost matice je rovna počtu lineárně nezávislých řádků dané matice.
Úpravy matic při určování hodnosti:
- můžeme měnit pořadí řádků
- můžeme násobit libovolný řádek matice nenulovým číslem
- můžeme přičíst c-násobek některého řádku k jinému řádku
- vynecháme z matice řádek, který je lineární kombinací jiných řádků (včetně nulového).

Inverzní matice:
Regulární matice – čtvercová matice má hodnost rovnu počtu řádků (sloupců) $h(A) = n$
Singulární matice – je to čtvercová matice, která není regulární.
Pro inverzní matici A^{-1} platí: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$
Inverzní matice k regulární matici je též regulární

Řešené příklady:

Příklad 1.
Vypočtěte součin matic *A*, *B*, jestliže je:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Protože matice *A* má tolik sloupců (3) jako matice *B* řádků (3), součin těchto matic existuje, jak plyne z definice.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot 1 - 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 2\cdot 0 - 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 2\cdot(-2) - 1\cdot(-1) + 3\cdot 3 & 2\cdot 3 - 1\cdot 1 + 3\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot 0 + 0\cdot 2 + 2\cdot 1 & 1\cdot(-2) + 0\cdot(-1) + 2\cdot 3 & 1\cdot 3 + 0\cdot 1 + 2\cdot(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Příklad 2.
Vypočtěte součiny čtvercových matic, je – li dáno: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Postupujeme podle definice – podmínka pro násobení je splněna – počet sloupců matice *A* je stejný jako počet řádků matice *B*.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 - 2\cdot 1 & 1\cdot 2 - 2\cdot 1 \\ -2\cdot 2 + 4\cdot 1 & -2\cdot 2 + 4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

$$B\cdot A=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 1-2\cdot 2 & -2\cdot 2+2\cdot 4\\ 1\cdot 1-1\cdot 2 & -1\cdot 2+1\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix}\neq O$$

Vidíme, že oba součiny jsou různé – násobení není komutativní (záleží na pořadí násobení).

Příklad 3.

Vypočtěte hodnost čtvercových matic, je – li dáno: $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$ (první řádek jsme vynásobili číslem -2 a přičetli ke druhému řádku.), $h(A)=1$

$B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ (první řádek jsme vynásobili číslem -2 a přičetli ke druhému řádku.)

$h(B)=2$

Příklad 4.

Určete hodnost matice $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 2 & -3\\ 11 & -4 & 13 & -1\\ 2 & -1 & 5 & 1\end{pmatrix}$

Pomocí elementárních řádkových a sloupcových úprav převedeme matici *A* na ekvivalentní zobecněnou trojúhelníkovou matici:

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 2 & -3\\ 11 & -4 & 13 & -1\\ 2 & -1 & 5 & 1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5 & 1\\ -2 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 2 & -3\\ -4 & 11 & 13 & -1\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5 & 1\\ 0 & -1 & -9 & -2\\ 0 & 4 & 2 & -3\\ 0 & 5 & 11 & -1\end{pmatrix}\approx$$

$$\approx\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5 & 1\\ 0 & -1 & -9 & -2\\ 0 & 0 & -34 & -11\\ 0 & 0 & -34 & -11\end{pmatrix}\approx\underline{\underline{\begin{pmatrix}-1 & 2 & 5 & 1\\ 0 & -1 & -9 & -2\\ 0 & 0 & -34 & -11\end{pmatrix}}}$$

Hodnost matice *A* je 3.

Příklad 5.

Zjistěte, zda matice A, B jsou navzájem inverzní, jestliže je dáno:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}\qquad B=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

Nejdříve upravíme matici B (vynásobíme číslem 0,5). Aby byly matice navzájem inverzní, musí být jejich součin jednotková matice.

$$B=\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5\\ -1 & 2 & 1\\ 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5\end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0{,}5 & 1 \cdot (-0{,}5) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0{,}5 & 1 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-0{,}5) \\ 2 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0{,}5 & 2 \cdot (-0{,}5) + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0{,}5 & 2 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-0{,}5) \\ 3 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 0{,}5 & 3 \cdot (-0{,}5) + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0{,}5 & 3 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-0{,}5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matice nejsou navzájem inverzní

Příklad 6.

Najděte inverzní matici k matici:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadaná matice	Jednotková matice
$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & \cdot(-3) \\ 3 & 1 & -2 & \\ -2 & 0 & 1 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \cdot(-3) \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & \\ 0 & -5 & 5 & :(-5) \\ -2 & 0 & 1 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \\ -3 & 1 & 0 & :(-5) \\ 0 & 0 & 1 & \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & \\ 0 & 1 & -1 & \cdot(-2) \\ -2 & 0 & 1 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0{,}6 & -0{,}2 & 0 & \cdot(-2) \\ 0 & 0 & 1 & \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & \cdot 2 \\ 0 & 1 & -1 & \\ -2 & 0 & 1 & \end{matrix}$	$\begin{matrix} -0{,}2 & 0{,}4 & 0 & \cdot 2 \\ 0{,}6 & -0{,}2 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 3 & :3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -0{,}2 & 0{,}4 & 0 & \\ 0{,}6 & -0{,}2 & 0 & \\ -0{,}4 & 0{,}8 & 1 & :3 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}6 & -0{,}2 & 0 \\ -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{1}{3} \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \cdot(-1) \end{matrix}$	$\begin{matrix} -0{,}2 & 0{,}4 & 0 & \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} & \\ -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{1}{3} & \cdot(-1) \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\frac{1}{15} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{1}{3} \end{matrix}$

Použitá literatura

Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.
Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS Praha 2002.
Huťka V. – Cirjak M.: Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU 7. část. SPN Praha 1986.