EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jihočeský kraj
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA 4. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_4_Literatura.

4.3.3 Lineární kombinace vektorů, lineární závislost a nezávislost vektorů

Definice:

Vektor $\mathbf{b}$ nazýváme lineární kombinací vektorů $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_m}$, jestliže existují reálná čísla $c_1, c_2, ..., c_m$ taková, že platí $\mathbf{b} = c_1\mathbf{a_1} + c_2\mathbf{a_2} + c_3\mathbf{a_3} + ...c_m\mathbf{a_m}$

Vektory $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_m}$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, jestliže je lineární kombinace rovna nulovému vektoru $c_1\mathbf{a_1} + c_2\mathbf{a_2} + c_3\mathbf{a_3} + ...c_m\mathbf{a_m} = \mathbf{o}$ pro všechna $c_1, c_2, ..., c_m = 0$.

Vektory $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, ..., \mathbf{a_m}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, jestliže je lineární kombinace rovna nulovému vektoru $c_1\mathbf{a_1} + c_2\mathbf{a_2} + c_3\mathbf{a_3} + ...c_m\mathbf{a_m} = \mathbf{o}$ z nichž alespoň jedno $\mathbf{c_i}$ je různé od nuly.

Řešené příklady

Příklad 1.

Zjistěte, zda vektory $\mathbf{a_1} = (1; 0; -1), \mathbf{a_2} = (-1; 1; 2), \mathbf{a_3} = (3; -1; 0)$ jsou lineárně závislé či nezávislé.

Rozepíšeme rovnici $c_1\mathbf{a_1} + c_2\mathbf{a_2} + c_3\mathbf{a_3} + ...c_m\mathbf{a_m} = \mathbf{o}$ pomocí složek a řešíme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých.

$c_1 \cdot (1; 0; -1) + c_2 \cdot (-1; 1; 2) + c_3 \cdot (3; -1; 0) = (0; 0; 0)$

soustava 3 rovnic o 3 neznámých vypadá takto:

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_2 - c_3 &= 0 \\ -c_1 + 2c_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_2 &= c_3 \\ 2c_2 &= c_1 \end{aligned}$$

Druhou a třetí rovnici dosadíme do první, výsledkem je $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Podle definice jsou vektory lineárně nezávislé.

Příklad 2.

Určete složky vektoru $\mathbf{b}$, jestliže platí: $\mathbf{b} = \mathbf{a_1} + 2\mathbf{a_2}$ a $\mathbf{a_1} = (4; 6), \mathbf{a_2} = (-2; -3)$

V této lineární kombinaci známe 2 vektory a koeficienty, máme určit složky vektoru $\mathbf{b}$. Budeme řešit soustavu 2 rovnic o 2 neznámých.

$(b_1; b_2) = 1 \cdot (4; 6) + 2 \cdot (-2; -3)$ odtud:

$b_1 = 4 - 4 = 0$

$b_2 = 6 - 6 = 0$

Souřadnice vektoru $\mathbf{b} = (0; 0)$

Příklad 3.

Zjistěte, zda vektor $\mathbf{b} = (2;3)$ je možné vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a_1} = (4;-1), \mathbf{a_2} = (2;-2)$.

Lineární kombinaci vektorů udává tato rovnice:

$\mathbf{b} = c_1\mathbf{a_1} + c_2\mathbf{a_2}$ - nyní budeme počítat koeficienty c_1 a c_2

$(2;3) = c_1 \cdot (4;-1) + c_2 \cdot (2;-2)$

$2 = 4c_1 + 2c_2$

$3 = -c_1 - 2c_2 \Rightarrow c_1 = -2c_2 - 3$

c_1, které jsme vyjádřili ve druhé rovnici, dosadíme do první rovnice

$$2 = 4 \cdot (-2c_2 - 3) + 2c_2 \Rightarrow c_2 = -\frac{7}{3}$$

$$c_1 = -2c_2 - 3 = -2 \cdot \left(-\frac{7}{3}\right) - 3 = \frac{5}{3}$$

Vektor $\mathbf{b}$ je lineární kombinací obou vektorů.

Příklad 4.

Zjistěte, zda vektory $\mathbf{a_1} = (1;1), \mathbf{a_2} = (0;1)$ jsou lineárně závislé či nezávislé.

Lineární kombinaci položíme rovnu nulovému vektoru a spočítáme koeficienty.

$c_1\mathbf{a_1} + c_2\mathbf{a_2} = \mathbf{o}$

řešíme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \cdot 0 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

Z první rovnice je zřejmé, že $c_1 = 0$. Dosadíme do druhé rovnice a koeficient $c_2 = 0$. Oba koeficienty jsou nulové, tzn. že vektory jsou nezávislé.

Použitá literatura

Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.

Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.

Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS Praha 2002.

Huťka V. – Cirjak M.: Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU 7. část. SPN Praha 1986.