INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA 4. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_4_Literatura.

4.3.9. Soustava lineárních rovnic řešených pomocí matic

Definice:

Soustava rovnic

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$

....

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$

kde a_{ik}, b_i $(i = 1, 2, ..., m,\ k = 1, 2, ..., n)$ jsou reálná čísla a x_k $(k = 1, 2, ..., n)$ jsou neznámé, nazýváme soustava *m* lineárních rovnic s *n* neznámými. Čísla a_{ik} nazýváme koeficienty soustavy. Soustavu můžeme přepsat do matice typu (m,n).

Matice soustavy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Vektor pravé strany soustavy:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy:

$$\overline{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Nehomogenní soustava rovnic – vektor pravé strany matice $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$.
Homogenní soustava rovnic – všechny pravé strany soustavy jsou 0 ($\mathbf{b} = \mathbf{o}$).
Frobeniova věta. Soustava rovnic je řešitelná právě tehdy, jestliže hodnost matice rozšířené se rovná hodnosti matice soustavy, tj. $h(A) = h(\overline{A})$.

<u>Obecné řešení soustavy</u>
volné proměnné – jejich hodnoty si volíme
vázané proměnné – tyto proměnné počítáme
<u>Partikulární řešení</u>
Dosadíme – li za volné proměnné konkrétní čísla.
<u>Základní řešení</u>
Za volné proměnné dosadíme nuly
<u>Parametrické řešení</u>
Za volné proměnné dosadíme parametry
<u>Triviální řešení</u>
všechny proměnné jsou nuly

Řešené příklady:

Příklad 1.
Zjistěte, zda je řešitelná soustava rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 + 7x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Soustavu rovnic přepíšeme do matice $\overline{\mathbf{A}}$ (matice **A** je již součástí této matice – nemá pravé strany) a určíme hodnosti obou matic.

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & -2 & 2 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

první řádek jsme opsali
ke druhému řádku jsme přičetli -2 násobek prvního řádku
ke třetímu řádku jsme přičetli -1 násobek prvního řádku

k prvnímu řádku jsme přičetli druhý řádek (pro zjednodušení soustavy rovnic)
druhý řádek jsme opsali
ke třetímu řádku jsme přičetli druhý řádek

Hodnost matice $h(A) = 2$ a $h(\overline{A}) = 3$. Podle Frobeniovy věty nemá soustava rovnic řešení.

Příklad 2.
Zjistěte, zda je řešitelná soustava rovnic:

$$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1$$

$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1 + x_3 + 3x_4 = -1$$

Příklad budeme řešit obdobně jako příklad 1. Soustavu přepíšeme do matice a určíme její hodnost.

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

první řádek jsme opsali
ke druhému řádku jsme přičetli první řádek
ke třetímu řádku jsme přičetli -1 násobek prvního řádku

k prvnímu řádku jsme přičetli druhý řádek (pro zjednodušení soustavy rovnic)
druhý řádek jsme opsali
ke třetímu řádku jsme přičetli -1 násobek druhého řádku

Hodnost matice $h(A) = h(\overline{A}) = 2$. Podle Frobeniovy věty má soustava rovnic řešení.
Obecné řešení:

$$x_1 + x_3 + 3x_4 = -1 \Rightarrow x_1 = -x_3 - 3x_4 - 1$$

$$x_2 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_4$$

Příklad 3.
Řešte soustavu rovnic:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

Tato homogenní soustava rovnic (na pravé straně je 0) je podle Frobeniova věty vždy řešitelná a matice soustavy je zároveň maticí soustavy rozšířenou.

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

první řádek jsme opsali
ke druhému řádku jsme přičetli -2 násobek prvního řádku
ke třetímu řádku jsme přičetli první řádek

k prvnímu řádku jsme přičetli 2 násobek druhého řádku
druhý řádek jsme vynásobili -1
ke třetímu řádku jsme přičetli druhý řádek

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

$x_3 = 0$

(triviální řešení)

Příklad 4.
Řešte soustavu rovnic:

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\
2x_1 - 3x_2 - x_3 &= 0 \\
4x_1 - 7x_2 + x_3 &= 0 \\
-x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Jedná se o homogenní soustavu rovnic, která má podle Frobeniova věty vždy řešení. Soustavu opět přepíšeme do matice a určíme její hodnost.

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & -7 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

první řádek jsme opsali
ke druhému řádku jsme přičetli -2 násobek prvního řádku
ke třetímu řádku jsme přičetli -4 násobek prvního řádku
ke čtvrtému řádku jsme přičetli první řádek

k prvnímu řádku jsme přičetli 2 násobek druhého řádku
druhý, třetí, čtvrtý řádek je stejný – ponechali jsme pouze jeden

Obecné řešení:

$x_1 - 5x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 5x_3$

$x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3x_3$

Parametrické řešení:

$x_1 = 5t$

$x_2 = 3t$

$x_3 = t$

Partikulární řešení:

např. $x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 3$

Použitá literatura

Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.

Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.

Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS Praha 2002.

Huťka V. – Cirjak M.: Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU 7. část. SPN Praha 1986.