INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA 4. ročník

Reg. č. projektu:	CZ.1.07/1.1.10/01.0007
Název projektu:	**Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**
Název příjemce:	**Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**
Klíčová aktivita:	Využití ICT ve výuce matematiky
Použitá literatura:	Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_4_Literatura.

4.1.5 Geometrická posloupnost

Definice:

Posloupnost se nazývá geometrická právě tehdy, když podíl libovolného (kromě prvního) a jemu předchozího členu je stálý. Tento poměr nazýváme kvocient a značíme q. Následující člen tak můžeme vyjádřit pomocí q a a_n.

Vzorce:

$a_{n+1} = a_n \cdot q$

Geometrický průměr: $|a_n| = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

n–tý člen posloupnosti: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Součet n členů posloupnosti: $s_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

Řešené příklady:

Příklad 1)

Určete prvních 6 členů geometrické posloupnosti, jestliže je dáno: $a_1 = 3, a_2 = 2$

Nejdříve vypočteme kvocient této geometrické. posloupnosti:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3}$$

Nyní dopočteme zbývající členy podle základního vzorce $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Za n postupně dosadíme čísla 2 až 5.

$$a_3 = a_2 \cdot q = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

$$a_5 = a_4 \cdot q = \frac{8}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{27}$$

$$a_6 = a_5 \cdot q = \frac{16}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{81}$$

Příklad 2)

Geometrická posloupnost je určena vzorcem pro n–tý člen: $a_n = 3 \cdot 3^{n-1}$. Určete a_1, a_2, a_{n+1}.

Budeme postupně dosazovat za n $1, 2, n+1$.

$$a_1 = 3 \cdot 3^{1-1} = 3$$

$$a_2 = 3 \cdot 3^{2-1} = 9$$

$$a_{n+1} = 3 \cdot 3^{n+1-1} = 3 \cdot 3^n$$

Příklad 3)

V dané geometrické posloupnosti $a_1 = -128, q = -\dfrac{1}{2}$ vypočtěte a_7.

Použijeme vzorec pro n –tý člen geometrické posloupnosti $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ a dosadíme za n 7 :

$$a_7 = a_1 \cdot q^{n-1} = -128 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{7-1} = -2$$

Příklad 4)

Vypočtěte součet prvních 8 členů geometrické posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$: 2, 6, 18, 54.

Nejdříve v posloupnosti určíme q :

$$q = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3$$

Dosadíme do vzorce pro součet členů geometrické posloupnosti:

$$s_8 = a_1 \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{3^8 - 1}{3 - 1} = 6560$$

Příklad 5)

Geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je určena: $a_5 + a_6 = 96$, $\mathrm{a}_7 - a_5 = 96$, $s_n = 2046$. Určete a_1, q, n.

Vyjádříme a_6, a_7 pomocí a_5 a řešíme soustavu rovnic.

$$a_5 + a_5 \cdot q = 96$$

$$a_5 \cdot q^2 - a_5 = 96$$

$$a_5 \cdot (1 + q) = 96$$

$$a_5 \cdot (q^2 - 1) = 96$$

$$a_5 = \frac{96}{1 + q}$$

$$\frac{96}{1 + q} \cdot (q + 1) \cdot (q - 1) = 96$$

$$96 \cdot (q - 1) = 96 \Rightarrow q = 2,\ a_5 = \frac{96}{1 + 2} = 32$$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow a_1 = \frac{a_5}{q^4} = \frac{32}{2^4} = 2$$

Ze vzorce pro součet posloupnosti určíme ještě počet členů n

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$2046 = 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \Rightarrow n = 10$$

Příklad 6)

Geometrická posloupnost je dána vzorcem pro výpočet n-tého členu: $a_n = 2 \cdot 4^n$. Vypočtěte součet prvních 5 členů.

Vypočteme a_1, a_2, q

$a_1 = 2 \cdot 4 = 8$

$a_2 = 2 \cdot 4^2 = 32$

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{32}{8} = 4$

Dosadíme do vzorce pro součet geometrické posloupnosti a za n dosadíme 5.

$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$s_5 = 8 \cdot \frac{4^5 - 1}{4 - 1} = 2728$

Použitá literatura

Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.
Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS Praha 2002.
Huťka V. – Cirjak M.: Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU 7. část. SPN Praha 1986.