INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA 4. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_4_Literatura.

4.1.9 Užití geometrické posloupnosti v příkladech

Řešené příklady

Příklad 1)

O vynálezci šachu se traduje zajímavá legenda. Když se s jeho vynálezem seznámil tehdejší Římský císař, novou hru si velice zamiloval. Pozval proto vynálezce k sobě a nabídl mu jako odměnu cokoliv, si bude přát. Vynálezce se chvíli zamyslel a pak požádal císaře o trochu rýže. Šachovnice má 64 polí. Za první políčko chtěl dostat jedno zrnko rýže, za druhé dvě zrnka rýže, za třetí čtyři zrnka, za čtvrté osm zrnek a tak dále. Za každé další políčko chtěl dvojnásobný počet zrníček než za políčko předchozí. Císař byl velmi udiven jeho skromností a nabízel mu cennější odměnu. Odhadni počet zrníček, které vynálezce po císaři žádal. Kolik by to bylo kg? Urči počet zrníček výpočtem. Urči jejich hmotnost v kg, pokud 1 kg rýže tvoří přibližně 30 000 zrnek.

Počty zrníček rýže tvoří geometrickou posloupnost 1, 2, 4, 8, 16, 32,… tedy $a_1 = 1, q = 2, n = 64$. Celkový počet zrníček rýže bude součtem všech členů této geometrické posloupnosti.

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 = 1{,}885 \cdot 10^{19}$$

Hmotnost všech zrníček určíme tak, že počet všech zrníček vydělíme počtem zrnek v 1 kg

$$m = \frac{s_n}{30000} = \frac{1{,}885 \cdot 10^{19}}{30000} = 6{,}149 \cdot 10^{14}\ kg$$

Příklad 2)

Baktérie se v příznivých podmínkách dělí přibližně jednou za hodinu. Kolik baktérií se namnoží v roztoku za příznivých podmínek za 1 den? Jak dlouho by trvalo než by hmotnost baktérií překročila hmotnost Země? Úhyn neuvažuj. Hmotnost jedné baktérie je přibližně $6 \cdot 10^{-15}$ kg a hmotnost Země je $6 \cdot 10^{24}$ kg.

Všechny bakterie tvoří geometrickou posloupnost (počty se vždy zdvojnásobí) 1, 2, 4, 8, 16, 32,…, $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4,\ q = 2,\ n = 25$ (na počátku pokusu je jedna bakterie v 0 té hodině).

Vypočteme n tý člen geometrické posloupnosti:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^{25-1} = 2^{24} = 16777216$$

Za jeden den by se namnožilo 16 777 216 bakterií

Nyní budeme počítat počet bakterií, které by vážily stejně jako Země (vydělíme hmotnost Země a hmotnost jedné bakterie)

$$\frac{6 \cdot 10^{24}}{6 \cdot 10^{-15}} = 10^{39} \Rightarrow \text{ toto je hodnota } n \text{ tého členu}$$

Opět dosadíme do vzorce pro n tý člen a určíme n.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$10^{39} = 1 \cdot 2^{n-1}$$

$$\log 10^{39} = \log 2^{n-1}$$

celou rovnici zlogaritmujeme

$$39 \cdot \log 10 = (n-1) \cdot \log 2$$

$$\boxed{\log_{10} 10 = 1}$$

$$\frac{39}{\log 2} = n-1$$

$$130{,}6 = n$$

n je 131, tedy po 130 hodinách . Po 130 hodinách by bakterie vážily více než Země.

Příklad 3)

Určete přibližný počet obyvatel města na počátku roku 2000, jestliže počet obyvatel na počátku roku 1984 byl 90 000 a každoroční přírůstek je 3 %

Jedná se o geometrickou posloupnost, počáteční člen $a_0 = 90000, n = 16, p = 3\,\%$
Dosadíme do vzorce pro n-tý člen:
$a_{16} = a_0 \cdot q^n = 90000 \cdot 1{,}03^{16} = 144423$
Na počátku roku 2000 bude ve městě 144 423 obyvatel.

Příklad 4)

Cena nového stroje je 58 560 Kč. Při každoroční inventuře se odepisuje 5 % hodnoty stroje z předcházejícího roku (amortizace). Jaká hodnota stroje bude po 10 letech?

Jedná se o geometrickou klesající posloupnost (cena se bude snižovat):
$a_0 = 58\,560,\ p = 5\,\%, n = 10, q = 1 - \frac{5}{100} = 0{,}95$
$a_{10} = a_0 \cdot q^{10} = 58\,560 \cdot 0{,}95^{10} = 35\,062$
Cena stroje po 10 letech bude 35 062 Kč.

Použitá literatura

Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
Boucník P. – Herman J.: Odmaturuj z matematiky 3. DIDAKTIS Praha 2004.
Čermák P. – Červínková P.: Odmaturuj z matematiky. DIDAKTIS Praha 2002.
Huťka V. – Cirjak M.: Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU 7. část. SPN Praha 1986.