EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Jihočeský kraj

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA

3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

Nezávislé pokusy

Náhodné pokusy považujeme za nezávislé, jestliže pravděpodobnosti výsledku kteréhokoli pokusu nezávisí na výsledcích pokusů ostatních.

Cvičení 1.

V krabici je 6 bílých klobouků a 4 černé klobouky. Náhodný pokus spočívá ve vylosování jednoho klobouku a v zjištění jeho barvy. Potom se klobouk vrátí do krabice a celá situace se může opakovat. Pravděpodobnost vybrání bílého klobouku je v každém pokusu 0,6 a pravděpodobnost vybrání černého klobouku je v každém pokusu 0,4. Pokusy jsou nezávislé, protože pravděpodobnost vybrání bílého (černého) klobouku není ovlivněna výsledky předchozích pokusů. Označme jako jev A_1 vybrání bílého klobouku při prvním pokusu, jako jev A_2 vybrání bílého klobouku při druhém pokusu, jako jev A_3 vybrání bílého klobouku při třetím pokusu. Jevy $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ představují vybrání černého klobouku při prvním, druhém a třetím pokusu. Pokusme se určit možné výsledky 3 pokusů a naznačme pravděpodobnosti těchto výsledků.
Při pokusech nastane jeden z těchto 8 výsledků:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3$$
$$\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$$
$$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$$
$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$$
$$\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$$
$$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$$
$$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$$

Jev $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ vyjadřuje vybrání bílého klobouku ve všech třech pokusech a jeho pravděpodobnost vzhledem k nezávislosti pokusů je 0,6 ·0,6 · 0,6 = 0,216. Jevy $\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3$, $A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$, $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$ vyjadřují vybrání dvou bílých a jednoho černého a mají pravděpodobnost 0,4 · 0,6 · 0,6 = 0,6 · 0,4 · 0,6 = 0,6 · 0,6 · 0,4 = 0,144. Vzhledem k neslučitelnosti těchto jevů je pravděpodobnost vybrání 2 bílých a 1 černého součtem jejich pravděpodobností 3 · 0,144 = 0,432. Podobně pravděpodobnost vybrání 1 bílého a 2 černých klobouků je součtem pravděpodobností jevů $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3$, $\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3$, $A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$. Rovněž tyto jevy mají stejnou pravděpodobnost 0,4 · 0,4· 0,6 = 0,096, takže pravděpodobnost vybrání 1 bílého a 2 černých klobouků je 3 · 0,096 = 0,288. Konečně pravděpodobnost jevu $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3$, který představuje vybrání 3 černých klobouků, je 0,4 · 0,4 · 0,4 = 0,064. Výsledky jsou uspořádány do tabulky

Počet vybraných bílých klobouků	Pravděpodobnost vybrání x bílých klobouků
x	$P(x)$
0	0,064
1	0,288
2	0,432
3	0,216

Všimněte si, že součet pravděpodobností $P(x)$ v tabulce se rovná 1. Při vybírání 3 klobouků totiž neexistuje jiná možnost výběru 0, 1, 2 nebo 3 bílé klobouky. Sjednocením uvedených jevů dostáváme jev jistý; pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Obecným vyjádřením tohoto problému je tzv. **Bernoulliho schéma**. Je-li určeno pořadí jevů A a $\bar{A}$ (například v prvních x po sobě jdoucích pokusech nastane jev A a v dalších $n - x$ po sobě jdoucích pokusech nastane jev $\bar{A}$), potom pravděpodobnost tohoto pořadí je rovna součinu pravděpodobností $p^x \cdot q^{n-x}$. Výchozí podmínce, že při n nezávislých pokusech nastane jev A celkem x-krát a jev $\bar{A}$ celkem $(n - x)$krát, však vyhovují i jiná pořadí jevů A a $\bar{A}$. Celkový počet různých pořadí je počtem permutací z n prvků, mezi nimiž je x a $n - x$ stejných. Můžeme to vyjádřit počtem kombinací x-té třídy z n prvků, jejichž počet je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{x!(n-x)!}.$$

Označíme-li symbolem $P(x)$ pravděpodobnost, že při n nezávislých pokusech jev A nastane právě x-krát, dostaneme

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x \cdot q^{n-x}$$

pro $x = 0, 1, \dots, n$.

Cvičení 2.

Jaká je pravděpodobnost, že při 3 hodech kostkou šestka nepadne vůbec, padne jednou, dvakrát, třikrát? Ukažte, že součet pravděpodobností těchto jevů se rovná 1.

Jde o $n = 3$ nezávislých pokusů, ve kterých pravděpodobnost jevu A: padnutí šestky je $p = \frac{1}{6}$ a jevu $\bar{A}$: nepadnutí šestky je $q = 1 - p = \frac{5}{6}$. Hledané pravděpodobnosti $P(x)$ pro $x = 0, 1, 2, 3$ určíme podle vzorce

$$P(x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{3-x}.$$

Po dosazení za x dostáváme hledané pravděpodobnosti. Výsledky jsou uspořádány do tabulky.

x	$P(x)$
0	$\frac{125}{216}$
1	$\frac{75}{216}$
2	$\frac{15}{216}$
3	$\frac{1}{216}$
Součet	1

Cvičení 3.

Provádíme 5 nezávislých pokusů. Pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu stejná jako pravděpodobnost neúspěchu. Vypočítejte pravděpodobnost, že budeme úspěšní a) právě jednou, b) v každém pokusu, c) alespoň jednou, d) maximálně jednou, e) dvakrát nebo třikrát.

Ve všech případech je $n = 5$ a $p = q = 0{,}5$.

a) $P(1) = \binom{5}{1} \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^4 = \frac{5}{32} \doteq 0{,}156$

b) $P(5)=\binom{5}{5}\cdot 0,5^5\cdot 0,5^0=\frac{1}{32}\doteq 0,031$

c) Pravděpodobnost alespoň jednoho úspěchu je pravděpodobnost jednoho, dvou, tří, čtyř nebo pěti úspěchů. Vzhledem k neslučitelnosti těchto jevů tuto pravděpodobnost vypočteme jako součet

$$P(x\geq 1)=P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)=\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}\doteq 0,969\,.$$

d) Pravděpodobnost jevu maximálně jeden úspěch je součet pravděpodobností žádného a jednoho úspěchu $P(0)+P(1)=\frac{6}{32}\doteq 0,188$.

e) $P(2)+P(3)=\frac{20}{32}\doteq 0,625$

Příklad 1.

Test obsahuje 10 otázek a na každou z nich jsou možné 4 odpovědi. Správnou odpověď má student zaškrtnout. Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví správně alespoň 5 otázek, jestliže látku vůbec nezná a volí odpovědi náhodně?

Příklad 2.

Je známo, že určitý lék úspěšně léčí dané onemocnění v 90 % případů. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň čtyři z pěti pacientů budou vyléčeni?

Příklad 3.

Automat vyrobí za minutu 10 součástek. Pravděpodobnost vyrobení vadné součástky je 0,01. Po kolika minutách bude pravděpodobnost, že byl vyroben alespoň jeden zmetek, rovna minimálně 0,8?

Příklad 4.

Pravděpodobnost, že spotřeba elektrické energie ve všední den určitého ročního období přesáhne stanovenou normu, je 0,3. Jaká je pravděpodobnost, že v pěti náhodně vybraných všedních dnech nebude norma ani jednou překročena?

Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cirjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčik, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.