



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA

3. ročník

Reg. č. projektu:	CZ.1.07/1.1.10/01.0007
Název projektu:	Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP
Název příjemce:	Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1
Klíčová aktivita:	Využití ICT ve výuce matematiky
Použitá literatura:	Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

Podmíněná pravděpodobnost a pravděpodobnost průniku

Pokud k souboru podmínek, za kterých byl náhodný pokus prováděn, přibyla nová podmínka, tj. nastoupení jevu B , nazýváme pravděpodobnost podmíněnou pravděpodobností jevu A vzhledem k jevu B . Zapisujeme $P(A/B)$ a čteme jako *pravděpodobnost jevu A za podmínky, že nastoupí jev B* .

Dva jevy jsou nezávislé, jestliže pravděpodobnost jednoho jevu nezávisí na nastoupení jevu druhého, tedy

$$P(A) = P(A/B) \text{ a zároveň } P(B) = P(B/A).$$

V opačném případě říkáme, že jevy A a B jsou závislé.

Cvičení 1.

Údaje o 100 narozených dětech jsou uspořádány do tabulky. Náhodně vybereme jedno dítě. Označíme jako jev A vybrání dítěte s hmotností do 3 kg a jako jev B vybrání dítěte do výšky 50 cm. Rozhodněme, zda jevy A a B jsou jevy závislé.

Výška dítěte	Počet dětí s hmotností	
	do 3 kg	3 kg a více
do 50 cm	60	20
50 cm a více	15	5

Z tabulky je zřejmé, že dětí s hmotností do 3 kg je celkem 75 ze 100, takže pravděpodobnost vybrání dítěte s hmotností do 3 kg je

$$P(A) = \frac{75}{100} = 0,75.$$

Podobně pravděpodobnost vybrání dítěte výšky do 50 cm je

$$P(B) = \frac{80}{100} = 0,80.$$

Podmíněnou pravděpodobnost jevu A vzhledem k jevu B určíme úvahou. Víme-li, že nastane jev B , tj. že vybrané dítě bude veliké do 50 cm, nejde již o výběr ze 100 dětí, ale jen z 80 dětí.

Z těchto 80 dětí má 60 hmotnost do 3 kg, takže hledaná pravděpodobnost

$$P(A/B) = \frac{60}{80} = 0,75.$$

Pravděpodobnost jevu B vzhledem k jevu A určíme podobným způsobem, tj.

$$P(B/A) = \frac{60}{75} = 0,80.$$

Vzhledem k tomu, že platí

$$P(A/B) = P(A) = 0,75,$$

a tedy i

$$P(B/A) = P(B) = 0,80,$$

jsou jevy A a B **nezávislé**.

Pravděpodobnost jevu A je stejná v případě, že o jevu B nemáme žádnou informaci, i v případě, že již víme, zda jev B nastal. Všimněte si, že i pravděpodobnost jevu A vzhledem k jevu \bar{B} je stejná jako $P(A)$, protože

$$P(A/\bar{B}) = \frac{15}{20} = 0,75.$$

Obdobně pravděpodobnost jevu B vzhledem k jevu \bar{A} je stejná jako $P(B)$, tj.

$$P(B/\bar{A}) = \frac{20}{25} = 0,80.$$

Výsledky mají obecnou platnost. Pokud jsou jevy A a B nezávislé, jsou nezávislé i jevy k nim opačné.

Podmíněná pravděpodobnost jevu A vzhledem k jevu B je definována jako podíl výsledků příznivých průniku jevů A a B a výsledků příznivých jevu B neboli

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ kde } P(B) \neq 0.$$

Poznámka:

Obdobně podmíněná pravděpodobnost jevu B vzhledem k jevu A je podílem pravděpodobnosti průniku jevů A a B a pravděpodobnosti jevu A

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ kde } P(A) \neq 0.$$

Z definice podmíněné pravděpodobnosti dostáváme vzorec pro výpočet pravděpodobnosti průniku dvou náhodných jevů

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Pravděpodobnost současného nastoupení jevů A a B je součinem nepodmíněné pravděpodobnosti jednoho z jevů a podmíněné pravděpodobnosti druhého jevu vzhledem k jevu prvnímu.

Cvičení 2.

V klobouku je 10 lístků, na kterých jsou jména 6 chlapců a 4 dívek. Lístky řádně promícháme a dva z nich vybereme. Jaká je pravděpodobnost, že na obou lístcích jsou jména chlapců?

Označme jako jev A vytažení chlapeckého jména na prvním lístku a jako jev B vytažení chlapeckého jména na druhém lístku. Pravděpodobnost průniku jevů A a B je pravděpodobnost jevu, který spočívá v tom, že na obou lístcích jsou chlapecká jména. Pravděpodobnost určíme jako

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = 0, \bar{3}.$$

Stejný výsledek dostaneme, když podle klasické definice pravděpodobnosti určíme podíl výběru, které jsou příznivé a celkového počtu výběru. Při tomto způsobu výběru je pravděpodobnost vylosování dvou chlapců

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{15}{45} = 0, \bar{3}.$$

Poznámka:

Pro nezávislé jevy A a B víme, že současně platí

$$P(A/B) = P(A);$$

$$P(B/A) = P(B).$$

Vzorec pro výpočet pravděpodobnosti průniku jevů A a B má v takovém případě jednodušší tvar

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Pro nezávislé jevy je tedy pravděpodobnost průniku dvou jevů rovna součinu pravděpodobností těchto jevů.

Cvičení 3.

Pravděpodobnost vyrobení kvalitního výrobku na prvním stroji je 0,8 a na druhém stroji 0,9. Oba stroje pracují nezávisle na sobě. Vybereme po jednom výrobku z produkce obou strojů. Jaká je pravděpodobnost, že oba výrobky budou kvalitní?

Označme jako jev A : vyrobení kvalitního výrobku na prvním stroji a jako jev B : vyrobení kvalitního výrobku na druhém stroji. Potom pravděpodobnost vybrání dvou kvalitních výrobků je

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,9 = 0,72.$$

Poznámka:

Pro skupinu více než dvou jevů A_1, A_2, \dots, A_s nestačí **podvojná nezávislost** (nezávislost každé dvojice jevů) k tomu, abychom mohli celou skupinu označit za skupinu **vzájemně nezávislých** jevů. Jevy A_1, A_2, \dots, A_s jsou vzájemně nezávislé, jestliže kromě nezávislosti každé dvojice jevů žádný jev nezávisí na libovolném průniku jevů ostatních.

Příklad 1.

Jevy A, B, C jsou vzájemně nezávislé. Všechny mají stejnou pravděpodobnost 0,8. Vypočítejte pravděpodobnost, že při jednom náhodném pokusu nastanou všechny tři jevy, a pravděpodobnost, že nenastane ani jeden jev.

Příklad 2.

Přístroj je sestaven z 300 nezávisle pracujících součástek. Pravděpodobnost poruchy každé součástky za výrobní směnu je 0,01. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané směně budou mít všechny součástky poruchu.

Příklad 3.

Podíl žárovek ve skladu od určitého výrobce je 40%. Z těchto žárovek je 90 % první jakosti. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná žárovka je od tohoto výrobce a zároveň je i první jakosti?

Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cířjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčík, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.