INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

# Výukový materiál pro předmět

# MATEMATIKA

# 3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

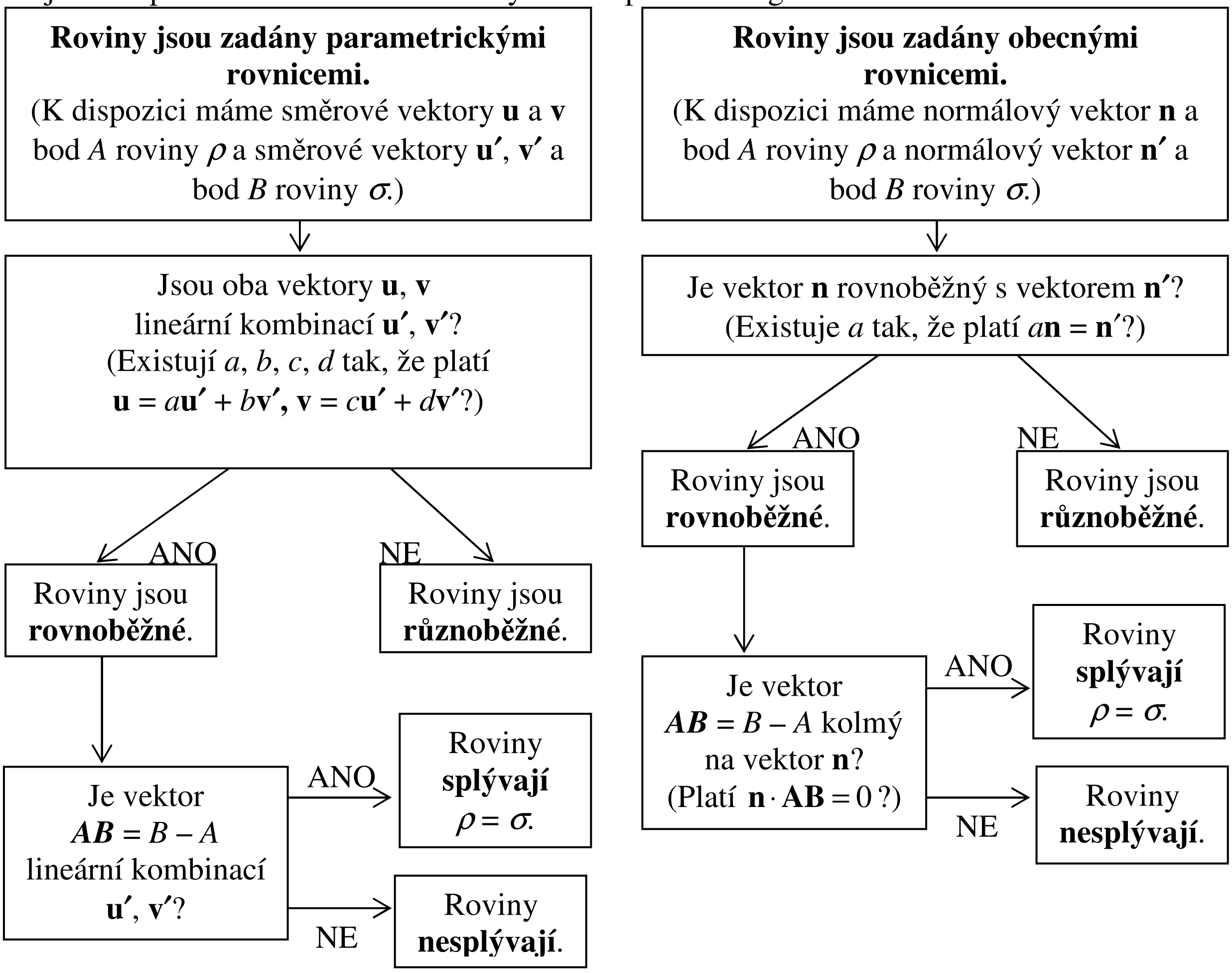
Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

## *Vzájemná poloha dvou rovin*

Vzájemnou polohu dvou rovin snadno vyšetříme pomocí diagramu:




### Poznámka.

Výše uvedený diagram lze použít i pro případ, kdy je jedna rovina zadána parametricky a druhá obecně – stačí převést obě na parametrické nebo obecné vyjádření.

### Cvičení 1.

Rozhodněte, jakou vzájemnou polohu mají roviny $\rho$ a $\sigma$:

$\rho : x = 2 + 3u - v,\ y = 1 - 9u + v,\ z = -3 - 12u - 2v;\ u, v \in R$

$\sigma : x = 1 - 2s + t,\ y = 2s - 3t,\ z = 2 - 4s - 4t;\ s, t \in R$

Postupovat budeme pomocí diagramu. Známe:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\rho$: | $A[2; 1; -3]$ | $\sigma$: | $B[1; 0; 2]$ |
| | **u** = (3; –9; –12) | | **u′** = (–2; 2; –4) |
| | **v** = (–1; 1; –2) | | **v′** = (1; –3; –4) |

Nyní zjistíme, zda jsou oba vektory **u**, **v** lineární kombinací **u′**, **v′**?

$\mathbf{u} = a\mathbf{u}' + b\mathbf{v}'$

$(3; -9; -12) = a(-2; 2; -4) + b(1; -3; -4)$

$(3; -9; -12) = (-2a + b; 2a - 3b; -4a - 4b)$

$$\begin{aligned} -2a + b &= 3 && \rightarrow \quad b = 3 + 2a \\ 2a - 3b &= -9 \\ -4a - 4b &= -12 && \rightarrow \quad b = 3 - a \end{aligned}$$

$$3 + 2a = 3 - a$$
$$a = 0,\ b = 3$$

Po dosazení za $a$, $b$ do druhé rovnice dostáváme: $2 \cdot 0 - 3 \cdot 3 = -9$. Vektor **u** je lineární kombinací vektorů **u′**, **v′**.

$\mathbf{v} = c\mathbf{u}' + d\mathbf{v}'$

$(-1;1;-2) = c(-2;2;-4) + d(1;-3;-4)$

$(-1;1;-2) = (-2c + d; 2c - 3d; -4c - 4d)$

$$\begin{aligned} -2c + d &= -1 && \rightarrow \quad d = -1 + 2c \\ 2c - 3d &= 1 \\ -4c - 4d &= -2 && \rightarrow \quad d = \frac{1}{2} - c \end{aligned}$$

$$-1 + 2c = \frac{1}{2} - c$$
$$c = \frac{1}{2},\ d = 0$$

Po dosazení za $c$, $d$ do druhé rovnice dostáváme: $2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot 0 = 1$. Vektor **v** je lineární kombinací vektorů **u′**, **v′**.

Protože vektory **u** i **v** jsou lineární kombinací vektorů **u′**, **v′**, roviny jsou rovnoběžné.

Nyní zjistíme, zda roviny splývají nebo nesplývají.

Určíme souřadnice vektoru $\mathbf{AB} = (-1;-1;5)$. Nyní zjistíme, zda vektor **AB** je také lineární kombinací vektorů **u′**, **v′**.

$\mathbf{AB} = e\mathbf{u}' + f\mathbf{v}'$

$(-1;-1;5) = e(-2;2;-4) + f(1;-3;-4)$

$(-1;-1;5) = (-2e + f; 2e - 3f; -4e - 4f)$

$$\begin{aligned} -2e + f &= -1 && \rightarrow \quad f = -1 + 2e \\ 2e - 3f &= -1 \\ -4e - 4f &= -2 \end{aligned}$$

Dosazením za $f$ do druhé rovnice získáme:

$$\begin{aligned} 2e - 3(-1 + 2e) &= -1 \\ 2e + 3 - 6e &= -1 \\ e &= 1 \quad f = 1 \end{aligned}$$

Po dosazení za $e, f$ do třetí rovnice dostáváme: $-4 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \neq 5$. Vektor **AB** není lineární kombinací vektorů **u′**, **v′**.

Roviny jsou rovnoběžné různé.

## Příklad 1.

Rozhodněte, jakou vzájemnou polohu mají roviny $\rho$ a $\sigma$:

a) $\rho: x = 2 + u - v,\ y = 1 - 3u + v,\ z = -3 - 4u - 2v;\ u, v \in R$
$\sigma: x = 4 - s + t,\ y = -7 + s - 3t,\ z = -17 - 2s - 4t;\ s, t \in R$

b) $\rho: x = 3 + 2u - 3v,\ y = -3u + v,\ z = -2 + u + v;\ u, v \in R$
$\sigma: x = 3 + 4s + t,\ y = -6s,\ z = -2 + 2s - t;\ s, t \in R$

## Cvičení 2.

Určete vzájemnou polohu rovin $\rho$ a $\sigma$ a v případě, že jsou různoběžné, určete i jejich průsečnici:
$\rho: 2x-5y+4z-10=0$, $\sigma: 4x-10y+8z-10=0$

Postupovat budeme pomocí diagramu. Známe:
$\rho$: $A[5; 0; 0]$ libovolný bod $\sigma$: $B[0; -1; 0]$ libovolný bod
$\mathbf{n} = (2; -5; 4)$ $\mathbf{n}' = (4; -10; 8)$
Zjistíme, zda vektor **n** je rovnoběžný s vektorem **n′**.
$a\mathbf{n} = \mathbf{n}'$
$a(2;-5;4)=(4;-10;8)$

$$2a = 4 \rightarrow a = 2$$
$$-5a = -10 \rightarrow a = 2$$
$$4a = 8 \rightarrow a = 2$$

Protože vektory **n** i **n′** jsou rovnoběžné, jsou i roviny rovnoběžné.
Nyní zjistíme, zda roviny splývají nebo nesplývají.
Určíme souřadnice vektoru $\mathbf{AB}=(-5;-1;0)$. Nyní zjistíme, zda vektor **AB** je kolmý na vektor **n.**
$\mathbf{n}\cdot\mathbf{AB}=0$
$(2;-5;4)\cdot(-5;-1;0)=-10+5=-5$
Skalární součin vektorů **n** a **AB** je různý od nuly → roviny jsou rovnoběžné různé.

## Příklad 2.

Určete vzájemnou polohu rovin $\rho$ a $\sigma$ a v případě, že jsou různoběžné, určete i jejich průsečnici:
a) $\rho: 2x-5y+4z-10=0$, $\sigma: x-y-z-2=0$
b) $\rho: 2x-5y+4z-10=0$, $\sigma: 4x-10y-2z-10=0$

## Přehled použité literatury


- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cirjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčik, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006




Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.