INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA

3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

Přímka v rovině

K popsání přímky potřebujeme buď 2 různé body nebo 1 bod a vektor.

Parametrická rovnice přímky

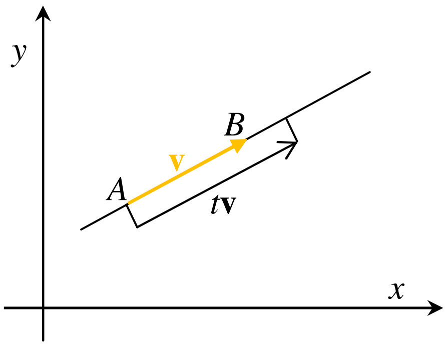
Přímka p je určena bodem $A[a_1;a_2]$ a směrovým vektorem $\mathbf{v} = (v_1;v_2)$. Symbolicky zapisujeme $X = A + t\mathbf{v}$, kde $t \in R$ je parametr. V podstatě se jedná o dvě rovnice, protože bod má v rovině dvě souřadnice:

$$x = a_1 + t \cdot v_1$$
$$y = a_2 + t \cdot v_2$$

Ke všem bodů z roviny se z bodu A dostaneme posunutím o vektor.

– Pokud je bod na přímce, posouváme se o vektor, který je násobkem vektoru **u**.
– Pokud bod není na přímce, posouváme se o vektor, který není násobkem vektoru **u**.

→ bod X leží na přímce p, pokud splňuje rovnici $X = A + t\mathbf{v}$, kde $t \in R$. Jinak řečeno – do libovolného bodu přímky p se dostanu z bodu A posunutím o násobek směrového vektoru **u**.



Poznámka

Pokud je přímka zadána dvěma body (například A, B), pak směrový vektor získáme z těchto bodů ze vztahu $\mathbf{v} = B - A$.

Cvičení 1.

Napište parametrické vyjádření přímky určené bodem A a vektorem **u**, je-li $A[3,-7], \mathbf{u} = (-2,5)$.

Dosadíme do vztahu $X = A + t\mathbf{u}$:

$$\begin{matrix} x = a_1 + t \cdot u_1 \\ y = a_2 + t \cdot u_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 3 + t \cdot (-2) \\ y = -7 + t \cdot 5 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 3 - 2t \\ y = -7 + 5t \end{matrix}$$

Parametrické vyjádření přímky je $x = 3 - 2t$, $y = -7 + 5t$; $t \in R$.

Cvičení 2.

Napište parametrické vyjádření přímky AB, jestliže $A[4,0], B[2,3]$.

Nejprve vyjádříme směrový vektor přímky AB ze vztahu $\mathbf{v} = B - A$:
$\mathbf{v} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2) = (2-4; 3-0) = (-2;3)$. Nyní jsme převedli úlohu na předchozí. Přímku máme vyjádřenou pomocí bodu A a vektoru **v**:

$$\begin{matrix} x = a_1 + t \cdot v_1 \\ y = a_2 + t \cdot v_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 4 + t \cdot (-2) \\ y = 0 + t \cdot 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 4 - 2t \\ y = 3t \end{matrix}$$

Parametrické vyjádření přímky je $x = 4 - 2t$, $y = 3t$.

Cvičení 3.

Napište parametrické vyjádření přímky, která prochází bodem A a je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{u} = BC$, jestliže $A[4,2], B[2,3], C[5,4]$.

Nejprve vyjádříme směrový vektor přímky BC ze vztahu $\mathbf{u} = C - B$:
$\mathbf{u} = (c_1 - b_1; c_2 - b_2) = (5-2; 4-3) = (3;1)$. Přímka má být rovnoběžná s vektorem **u**. Její směrový vektor je pouze jiným umístěním vektoru **u**. Proto pro vyjádření přímky použijeme vektor **u**.

$$\begin{matrix} x = a_1 + t \cdot u_1 \\ y = a_2 + t \cdot u_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 4 + t \cdot 3 \\ y = 2 + t \cdot 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 4 + 3t \\ y = 2 + t \end{matrix}$$

Parametrické vyjádření přímky je $x = 4 + 3t$, $y = 2 + t$; $t \in R$.

Cvičení 4.

Přímka p je dána parametrickým vyjádřením $x = 3 - 4t$, $y = -2 + t$; $t \in R$. Zjistěte, zda na přímce p leží bod $X[11, -4]$.

Bod X leží na přímce p, pokud splňuje rovnici $X = A + t\mathbf{v}$, kde $t \in R$. Budeme hledat násobek směrového vektoru **v**, který nám umožní posunout bod A do bodu X.

$$\begin{matrix} x = 3 - 4t \\ y = -2 + t \end{matrix} \rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 11 = 3 - 4t \Rightarrow t = -2 \\ -4 = -2 + t \Rightarrow t = -2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Bod } X$$

leží na přímce p.

Obě hodnoty parametru se rovnají. (Našli jsme hodnotu parametru, o kterou je posunut bod A.)

Příklad 1.

Napište parametrické vyjádření přímky určené bodem A a vektorem **u**, je-li:

a) $A[0,2], \mathbf{u} = (3,-6)$ b) $A[5,0], \mathbf{u} = (0,2)$ c) $A[0,0], \mathbf{u} = (4,0)$.

Příklad 2.

Napište parametrické vyjádření přímky *AB*, jestliže:

a) $A[-3,2], B[1,2]$ b) $A[-2,-3], B[1,-5]$ c) $A[0,-5], B[3,-3]$.

Příklad 3.

Napište parametrické vyjádření přímky, která prochází bodem *A* a je rovnoběžná s vektorem **u** = *BC*, jestliže:

a) $A[2,-5], B[2,-4], C[3,-1]$ b) $A[-3,0], B[-2,-7], C[-2,-5]$.

Příklad 4.

Přímka p je dána parametrickým vyjádřením $x = 3 - 4t$, $y = -2 + t$; $t \in R$. Zjistěte, zda na přímce p leží body:

a) $A[-1, -1]$ b) $B[-5, 0]$ c) $C[-9, 1]$ d) $D\left[-3, \frac{1}{2}\right]$ e) $E[11, 4]$ f) $F[1; -1{,}5]$.

Příklad 5.

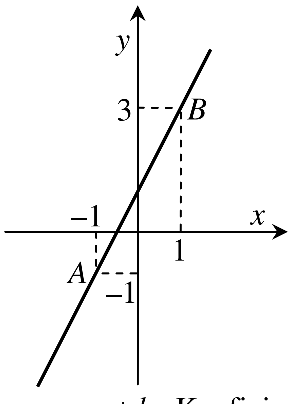
Určete druhou souřadnici bodu C tak, aby ležel na přímce AB, $A[3,-1]$, $B[1, 3]$, jestliže:
a) $C[1, y]$ b) $C[0, y]$ c) $C[2,5; y]$

Obecná rovnice přímky

Parametrické vyjádření přímky ze dvou zadaných bodů již umíme určit. Zkusíme najít jiné vyjádření:

Cvičení 5.

Jsou dány body $A[-1,-1], B[1,3]$. Nakreslete přímku AB do kartézské soustavy souřadnic a najděte její další vyjádření.



Přímka je také grafem lineární funkce $y = ax + b$. Koeficienty spočítáme dosazením bodů A, B do obecného předpisu funkce:

pro $A[-1,-1] \to -1 = a \cdot (-1) + b$

pro $B[1,3] \to 3 = a \cdot 1 + b$

Vyřešíme soustavu rovnic:

$$-1 = -a + b$$
$$3 = a + b$$

Sečtením rovnic získáme koeficient $b = 1$ a po dosazení i koeficient $a = 2$. Předpis funkce je $y = 2x + 1 \to$ rovnice $2x - y + 1 = 0$ je také rovnicí přímky.

Cvičení 6.

Zkusme výsledek minulého cvičení získat rovnou z parametrického vyjádření přímky.
Nejdříve parametrické vyjádření:
Směrový vektor **u** = *B* – *A*: $\mathbf{u}=(b_1-a_1;b_2-a_2)=(1-(-1);3-(-1))=(2;4)$

Tento směrový vektor má stejný směr jako vektor $(1,2)$, protože $(2,4)=2\cdot(1;2)$. Nyní již vyjádříme parametrickou rovnici přímky:

$$x=-1+t$$
$$y=-1+2t$$

Ve výsledku předchozího cvičení není obsažen parametr. Zkusme se ho i my zbavit a udělat ze dvou rovnic jednu → vynásobíme první rovnici –2 a obě rovnice sečteme (vyloučíme parametr):

$x=-1+t \quad |\cdot(-2)$

$y=-1+2t$

$$\left.\begin{array}{l}-2x=2-2t\\ y=-1+2t\end{array}\right]+$$

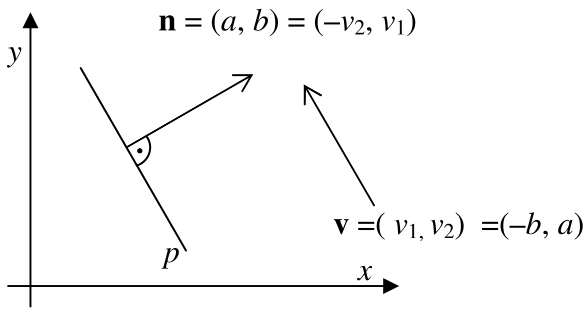
$-2x+y=1$

Převedením všech čísel na jednu stranu získáváme: $2x-y+1=0$.

Obecná rovnice přímky

$$ax+by+c=0$$

kde *a*, *b* jsou souřadnice normálového vektoru **n** = (*a*; *b*), který je kolmý k přímce *p* a získáme ho ze směrového vektoru **v** tak, že prohodíme souřadnice **v** a u jedné souřadnice změníme znaménko (po prohození) - v tomto případě má směrový vektor **v** souřadnice (–*b*; *a*).



Cvičení 7.

Napište obecnou rovnici přímky *AB*, je-li $A[3,-4],B[-7,1]$.

Ukažme ještě jeden postup pomocí normálového vektoru. Směrový vektor $\mathbf{u}=(b_1-a_1;b_2-a_2)=(-7-3;1-(-4))=(-10;5)\Rightarrow(-2,1)$. Normálový vektor potom je:

$\mathbf{u}=(u_1;u_2)=(-b;a)=(-2;1)\Rightarrow\mathbf{n}=(a;b)=(1;2)$

Dosadíme do obecného předpisu $ax+by+c=0 \rightarrow x+2y+c=0$. Abychom dopočítali koeficient *c*, dosadíme souřadnice jednoho bodu (třeba *A*): $3+2\cdot(-4)+c=0 \rightarrow c=5$.

Nyní již úplná obecná rovnice: $x+2y+5=0$.

Poznámka.

Je jedno, zda jsme v předchozím cvičení dosazovali bod *A* nebo *B*. Obě cesty vedou ke stejnému výsledku. (Přesvědčte se výpočtem.)

Cvičení 8.

Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $A[-2,1]$ a je kolmá k vektoru $\mathbf{u}=(1,-1)$.

Směrový vektor nově vzniklé přímky je vektor kolmý (normálový) k vektoru **u**. Její normálový vektor je kolmý na směrový → normálový vektor nové přímky je shodný s vektorem **u**.
Dosadíme do obecného předpisu $ax+by+c=0 \rightarrow x-y+c=0$. Abychom dopočítali koeficient c, dosadíme souřadnice bodu A: $-2-1+c=0 \rightarrow c=3$.
Nyní již úplná obecná rovnice: $x-y+3=0$.

Cvičení 9.

Rozhodněte, zda bod $A[-17, -22]$ leží na přímce určené obecnou rovnicí $5x-3y-6=0$.

Bod A leží na přímce p, pokud splňuje rovnici $ax+by+c=0$. Dosadíme souřadnice bodu A do rovnice přímky: $5\cdot(-17)-3\cdot(-22)-6\neq 0$. Bod A nesplňuje rovnost → bod neleží na přímce.

Cvičení 10.

Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $A[3,5]$ a je rovnoběžná s přímkou $p: 7x-3y+2=0$.

Rovnoběžná přímka s přímkou p má stejný normálový vektor (7, –3) (normálové vektory jsou kolmé na rovnoběžné → vzájemně jsou tedy rovnoběžné).
Dosadíme do obecného předpisu $ax+by+c=0 \rightarrow 7x-3y+c=0$. Abychom dopočítali koeficient c, dosadíme souřadnice bodu A: $7\cdot 3-3\cdot 5+c=0 \rightarrow c=-6$.
Nyní již úplná obecná rovnice: $7x-3y-6=0$.

Cvičení 11.

Napište obecnou rovnic přímky, která prochází bodem $A[4,-7]$ a je kolmá k přímce $p: 2x-5y+10=0$.

Kolmá přímka s přímkou p má směrový vektor kolmý na směrový vektor přímky p. (Normálové vektory jsou kolmé na směrové → vzájemně jsou tedy kolmé). Určíme kolmý vektor na vektor (2; –5), který bude normálový vektor nové přímky → (5; 2).
Dosadíme do obecného předpisu $ax+by+c=0 \rightarrow 5x+2y+c=0$. Abychom dopočítali koeficient c, dosadíme souřadnice bodu A: $5\cdot 4+2\cdot(-7)+c=0 \rightarrow c=-6$.
Nyní již úplná obecná rovnice: $5x+2y-6=0$.

Cvičení 12.

Určete reálné číslo m tak, aby přímky p: $(m+1)x+3my+2=0$, q: $2x+9y+5=0$ byly rovnoběžné.

Rovnoběžné přímky mají stejné normálové vektory, nebo jeden je násobkem druhého. Musí platit: $\mathbf{n}_p = k\cdot\mathbf{n}_q$, kde $\mathbf{n}_p=(m+1;3m)$, $\mathbf{n}_q=(2,9)$.

$$(m+1;3m)=k\cdot(2;9)$$
$$m+1=2k \Rightarrow 18k=9m+9$$
$$3m=9k \Rightarrow 18k=6m$$

Využijeme srovnávací metodu a porovnáme pravé strany rovnic:
$9m+9=6m \Rightarrow m=-3$
Hledané číslo je –3.

Příklad 6.

Napište obecnou rovnici přímky AB, je-li:

a) $A[2,-7], B[-3,-5]$ b) $A[6,2], B[6,-7]$ c) $A[4,-5], B[-2,-5]$.

Příklad 7.

Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem A a je kolmá k vektoru **u**, je-li:

a) $A[-2,9], \mathbf{u} = (3,-1)$ b) $A[3,0], \mathbf{u} = (-5,2)$

Příklad 8.

Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem A a je kolmá k vektoru $\mathbf{v} = BC$, je-li:

a) $A[4,-7], B[-9,5], C[-6,1]$ b) $A[-5,-3], B[11,-2], C[2,-2]$.

Příklad 9.

Rozhodněte, které z bodů $A[1, 2]$, $B[-3, -1]$, $C[-1, 2]$ leží na přímce určené obecnou rovnicí $3x - 2y + 7 = 0$.

Příklad 10.

Napište obecnou rovnici tečny kružnice v bodě dotyku $T[6, 2]$, jestliže střed kružnice má souřadnice $[3, -4]$.

Příklad 11.

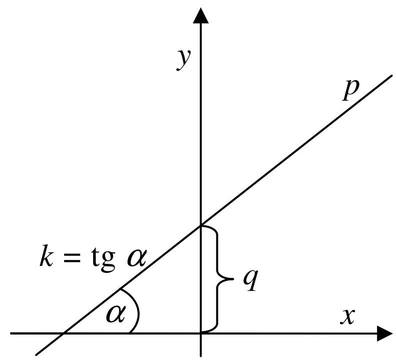
Určete reálné číslo *m* tak, aby přímky *p*, *q* byly rovnoběžné:

a) *p*: $(m+3)x-(2-m)y+4=0$, *q*: $6x+21y-10=0$

b) *p*: $(7m+1)x+(5-3m)y+m=0$, *q*: $3x-4y+7=0$

c) *p*: $mx-3y+8=0$, *q*: $6x-(m+7)y+m=0$

Směrnicový tvar rovnice přímky



1. Máme-li k dispozici obecnou rovnici přímky, vyjádříme z ní *y* a získáváme (musíme předpokládat, že *b* není 0):

$y=kx+q$, kde $k=-\dfrac{a}{b}, q=-\dfrac{c}{b}$

k nazýváme směrnicí přímky a platí *k* = tg α, kde α je úhel, který svírá přímka *p* s kladnou poloosou *x*.

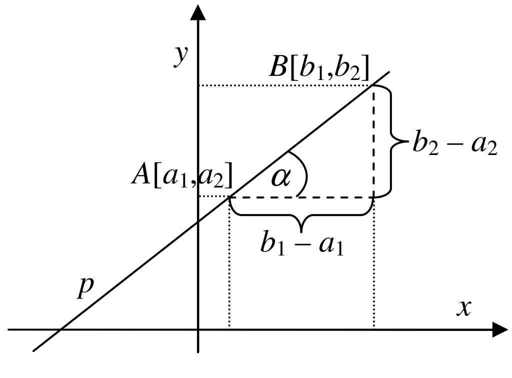
2. Je-li přímka určena dvěma body $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$, lze určit rovnici přímky ve tvaru:

$y-a_2=\dfrac{b_2-a_2}{b_1-a_1}(x-a_1)$, kde $b_1 \neq a_1$

POZOR! Jestliže je přímka rovnoběžná s osou *y*, pak má směrnicový tvar rovnice přímky tvar *x* = *m*, kde $m \in R$.

Poznámka.

Všimněte si prvního cvičení v kapitole „Obecná rovnice přímky“, protože předpis lineární funkce $y=ax+b$ je až na koeficienty stejný jako směrnicový tvar přímky. (rozmyslete si tuto podobu!)



Cvičení 13.

Určete směrnici a napište směrnicový tvar rovnice přímky, která je určena obecnou rovnicí $3x-2y+4=0$.

Přímka je zadána obecnou rovnicí → stačí vyjádřit *y* a získáme směrnicový tvar:

$$3x-2y+4=0 \to -2y=-3x-4 \to y=\frac{3}{2}x+2$$

Směrnicový tvar přímky je $y=\frac{3}{2}x+2$ a směrnice je $k=\frac{3}{2}$.

Cvičení 14.

Napište obecnou rovnici přímky, je-li dána její směrnice $k = 3$ a úsek $q = -2$, který vytíná na ose *y*.

Napíšeme nejdříve směrnicový tvar: $y=3x-2$. Nyní již stačí vše převést na jednu stranu rovnosti (vynulovat jednu stranu): $3x-y-2=0$.

Cvičení 15.

Napište obecnou rovnici přímky, která má směrnici $k=\frac{2}{3}$ a prochází bodem $A[6,-7]$.

Napíšeme nejdříve směrnicový tvar: $y=\frac{2}{3}x+q$. Dosazením souřadnic bodu *A* dopočítáme *q*:

$-7=\frac{2}{3}\cdot 6+q \ \to\ q=-11$. Celý směrnicový tvar je: $y=\frac{2}{3}x-11$. Nyní již stačí vše převést na jednu stranu rovnosti (popřípadě vynásobit 3): $\frac{2}{3}x-y-11=0 \to 2x-3y-33=0$.

Cvičení 16.

Určete velikost úhlu, který svírá přímka daná obecnou rovnicí $x-\sqrt{3}y+4\sqrt{3}+3=0$ s kladnou poloosou *x*.

Převedeme obecnou rovnici na směrnicový tvar:

$$x-\sqrt{3}y+4\sqrt{3}+3=0 \to x+4\sqrt{3}+3=\sqrt{3}y \to y=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{4\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}} \to y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+4+\sqrt{3}$$

Víme, že $k = \operatorname{tg} \alpha$. V našem případě $k=\frac{\sqrt{3}}{3} \to \frac{\sqrt{3}}{3}=\operatorname{tg}\alpha \to \alpha=30°$.

Přímka s kladnou poloosou *x* svírá úhel 30°.

Cvičení 17.

Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $A[2, 0]$ a s kladnou poloosou *x* svírá úhel o velikosti 60°.

Vyjdeme opět ze vztahu, že k = tg α. Z toho je zřejmé: $\text{tg}60° = \sqrt{3} = k$. Dosadíme do směrnicového tvaru: $y = \sqrt{3}x + q$. Dosazením souřadnic bodu A dopočítáme q: $0 = \sqrt{3}\cdot 2 + q \;\rightarrow\; q = -2\sqrt{3}$. Celý směrnicový tvar je: $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$. Nyní již stačí vše převést na jednu stranu rovnosti: $\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} = 0$.

Cvičení 18.

Napište směrnicový tvar rovnice přímky, která prochází bodem A[4, 3] a je kolmá k přímce $y = 2x + 1$.

Při výpočtu využijeme důležitou vlastnost dvou kolmých přímek → „součin směrnic dvou kolmých přímek je roven –1“:

Dejme tomu, že naše hledaná přímka má směrnici k. Pak $2\cdot k = -1 \rightarrow k = -\frac{1}{2}$. Dosadíme do směrnicového tvaru: $y = -\frac{1}{2}x + q$. Dosazením souřadnic bodu A dopočítáme q:

$3 = -\frac{1}{2}\cdot 4 + q \;\rightarrow\; q = 5$. Celý směrnicový tvar je: $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

Příklad 12.

Určete směrnici a napište směrnicový tvar rovnice přímky, která je určena obecnou rovnicí:
a) $5x + 3y + 4 = 0$ b) $-3x + 6y + 5 = 0$ c) $-4x - 2y - 1 = 0$

Příklad 13.

Napište obecnou rovnici přímky, je-li dána její směrnice k a úsek q, který vytíná na ose y.

a) $k = -2, q = -5$ b) $k = -\frac{1}{2}, q = 4$ c) $k = 0, q = 7$

Příklad 14.

Napište obecnou rovnici přímky, která má směrnici k a prochází bodem A, je-li:

a) $k = \frac{1}{4}, A[2, 2]$ b) $k = -\frac{1}{2}, A[-4, 5]$

Příklad 15.

Určete velikost úhlu, který svírá přímka daná obecnou rovnicí $x - y + 3 = 0$ s kladnou poloosou x.

Příklad 16.

Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $A[0, 3]$ a s kladnou poloosou x svírá úhel o velikosti 30°.

Příklad 17.

Napište směrnicový tvar rovnice přímky, která prochází bodem A a je kolmá k přímce p:

a) $A[6,1],\ p: y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{3}$ b) $A[4,2],\ p: y = \frac{1}{4}x + 1$

Přímka v prostoru

V prostoru máme zjednodušenou situaci, protože přímku v prostoru **nelze** vyjádřit obecným i směrnicovým (popřípadě úsekovým) tvarem.

Parametrická rovnice přímky

Přímka p je určena bodem $A[a_1; a_2; a_3]$ a směrovým vektorem $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$. Symbolicky zapisujeme $X = A + t\mathbf{v}$, kde $t \in R$ je parametr. V podstatě se jedná o tři rovnice, protože bod má v prostoru tři souřadnice:

$$x = a_1 + t \cdot v_1$$
$$y = a_2 + t \cdot v_2$$
$$z = a_3 + t \cdot v_3$$

Cvičení 19.

Napište parametrické vyjádření přímky určené bodem $A[6,1,2]$ a vektorem $\mathbf{u} = (1,2,3)$.

Dosadíme do vztahu $X = A + t\mathbf{u}$:

$$\begin{array}{lll} x = a_1 + t \cdot u_1 & x = 6 + t \cdot 1 & x = 6 + t \\ y = a_2 + t \cdot u_2 \rightarrow & y = 1 + t \cdot 2 \rightarrow & y = 1 + 2t \\ z = a_3 + t \cdot u_3 & z = 2 + t \cdot 3 & z = 2 + 3t \end{array}$$

Parametrické vyjádření přímky je $x = 6 + t$, $y = 4 + 2t$, $z = 2 + 3t$; $t \in R$.

Cvičení 20.

Určete čísla a, b tak, aby bod C ležel na přímce AB, je-li $A[1, 2, 3]$, $B[3, –2, 1]$, $C[a, b, –3]$.

Nejdříve určíme parametrickou rovnici přímky AB:

$\mathbf{u} = (b_1 - a_1; b_2 - a_2; b_3 - a_3) = (3-1; -2-2; 1-3) = (2; -4; -2)$.

$$\begin{array}{lll} x = a_1 + t \cdot u_1 & x = 1 + t \cdot 2 & x = 1 + 2t \\ y = a_2 + t \cdot u_2 \rightarrow & y = 2 + t \cdot (-4) \rightarrow & y = 2 - 4t \\ z = a_3 + t \cdot u_3 & z = 3 + t \cdot (-2) & z = 3 - 2t \end{array}$$

Dosadíme souřadnice bodu C a ze třetí rovnice vypočítáme hodnotu parametru $t \in R$, kterou dosadíme do zbývajících rovnic a vypočítáme a, b.

$z = 3 - 2t \rightarrow -3 = 3 - 2t \rightarrow t = 3$, $a = 1 + 2t \rightarrow a = 1 + 2 \cdot 3 \rightarrow a = 7$,

$b = 2 - 4t \rightarrow b = 2 - 4 \cdot 3 \rightarrow b = -10$

Souřadnice bod jsou $C[7, -10, 3]$.

Příklad 18.

Napište parametrické vyjádření přímky určené bodem A a vektorem $\mathbf{u}$:

a) $A[-2, -1, 5], \mathbf{u} = (-1, 2, 2)$ b) $A[4, 3, -2], \mathbf{u} = (3, 7, -1)$

Příklad 19.

Určete čísla a, b tak, aby bod C ležel na přímce AB, je-li:
a) $A[2, -3, 4]$, $B[4, -5, -6]$, $C[a, b + 5, 9]$
b) $A[4, -5, 3]$, $B[6, 3, -1]$, $C[a, b - 4, a + b]$
c) $A[5, -2, 3]$, $B[7, 6, -3]$, $C[a + 6, 2b + 3, 3a - 2b]$

Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cirjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčik, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
JIHOČESKÝ KRAJ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.