I N V E S T I C E   D O   R O Z V O J E   V Z D Ě L Á V Á N Í

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA

3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

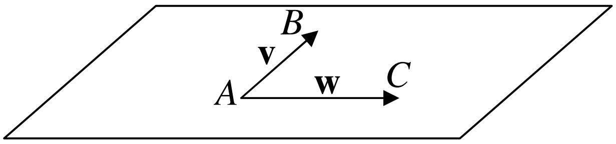
Rovnice roviny

K popsání roviny potřebujeme buď 3 různé body nebo 2 různé body a vektor nebo 1 bod a 2 nerovnoběžné (nekolineární) vektory.

Parametrické vyjádření roviny

Rovina ρ je určena bodem $A[a_1;a_2;a_3]$ a nerovnoběžnými vektory $\mathbf{v} = (v_1;v_2;v_3)$, $\mathbf{w} = (w_1;w_2;w_3)$. Symbolicky zapisujeme $X = A + s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$, kde t a s jsou reálné parametry. V podstatě se jedná o tři rovnice, protože bod má v prostoru tři souřadnice:

$$x = a_1 + s \cdot v_1 + t \cdot w_1$$
$$y = a_2 + s \cdot v_2 + t \cdot w_2$$
$$z = a_3 + s \cdot v_3 + t \cdot w_3$$



Poznámka

Všimněte si analogie s přímkou. Proto také platí, je-li rovina zadána třemi body (například A, B, C), pak směrové vektory získáme z těchto bodů například ze vztahu $\mathbf{v} = B - A$, $\mathbf{w} = C - A$.
Pokud je rovina zadána dvěma body (například A, B) a vektorem, druhý vektor získáme z těchto bodů ze vztahu $\mathbf{v} = B - A$.
Bod X leží v rovině ρ, pokud splňuje rovnici $X = A + s\mathbf{v} + t\mathbf{w};\ s,t \in R$.

Cvičení 1.

Napište parametrické vyjádření roviny určené body $A[1, 3, –1]$, $B[2, 3, 3]$, $C[–2, –5, –7]$.

Nejprve si vypočítáme souřadnice směrových vektorů ***AB*** a ***BC***:

$$\mathbf{AB} = B - A = \left(2-1;3-3;3-(-1)\right) = (1;0;4)$$
$$\mathbf{BC} = C - B = \left(-2-2;-5-3;-7-3\right) = (-4;-8;-10)$$

Pro parametrické vyjádření použijeme souřadnice bodu A a vektory ***AB*** a ***BC*** (je jedno, který bod využijeme, protože všechny tři body leží v rovině):

$$x = 1 + t - 4s$$
$$y = 3 - 8s$$
$$z = -1 + 4t - 10s$$

Cvičení 2.

Napište parametrické vyjádření roviny určené body $A[1, 3, –1]$, $B[2, 3, 3]$, $C[–2, –5, –7]$ a zjistěte, za v rovině ABC leží bod $L[2, 3, 3]$.

Využijeme řešení předchozího příkladu a použijeme z něj parametrické vyjádření:

$$x = 1 + t - 4s$$
$$y = 3 - 8s$$
$$z = -1 + 4t - 10s$$

Nyní zjistíme, zda bod L leží v této rovině. Dosadíme souřadnice bodu za x, y, z do rovnice roviny:

$$2 = 1 + t - 4s$$
$$3 = 3 - 8s$$
$$3 = -1 + 4t - 10s$$

Z druhé rovnice je vidět, že $s = 0$, jinak by nebyla splněna rovnost. Dosadíme tuto hodnotu do první a dopočítáme t: $2 = 1 + t$. Z této rovnice zjišťujeme, že $t = 1$. Za oba parametry dosadíme do poslední rovnice a ověříme, zda $s = 0$ a $t = 1$ jsou řešením soustavy rovnic:

$$3 = -1 + 4 \cdot 1 - 10 \cdot 0$$

Zjistili jsme, že bod L splňuje rovnici $X = A + t\mathbf{AB} + s\mathbf{BC};\ s, t \in R \rightarrow$ bod leží v rovině ABC.

Cvičení 3.

Určete souřadnice a_1, b_2, c_3 bodů $A[a_1, -3, 7]$, $B[0, b_2, 2]$, $C[-2, 2, c_3]$ tak, aby uvedené body ležely v rovině dané parametrickým vyjádřením $x = 1 + 4t - 2s,\ y = -3t + s,\ z = -2 + 5t - s$, $t, s \in R$.

Dosadíme nejdříve souřadnice bodu A do rovnice roviny:

$$a_1 = 1 + 4t - 2s$$
$$-3 = -3t + s$$
$$7 = -2 + 5t - s$$

Z druhé a třetí rovnice vypočítáme oba parametry, které dosadíme do rovnice první. Použijeme sčítací metodu a sečteme druhou a třetí rovnici:

$$4 = -2 + 2t$$
$$t = 3, s = 6$$

Nyní dosadíme do první rovnice:

$$a_1 = 1 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 6 = 1$$

Bod A má souřadnice $A[1, -3, 7]$.
Celý postup budeme nyní opakovat pro bod B.
Dosadíme nejdříve souřadnice bodu B do rovnice roviny:

$$0 = 1 + 4t - 2s$$
$$b_2 = -3t + s$$
$$2 = -2 + 5t - s$$

Z první a třetí rovnice vypočítáme oba parametry, které dosadíme do rovnice druhé. Použijeme sčítací metodu a sečteme druhou a třetí rovnici, kterou vynásobíme –2:

$$-4 = 5 - 6t$$
$$t = \frac{3}{2}, s = \frac{7}{2}$$

Nyní dosadíme do druhé rovnice:

$$b_2 = -3 \cdot \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = -1$$

Bod B má souřadnice $B[0, -1, 2]$.
A ještě jednou pro C.
Dosadíme nejdříve souřadnice bodu C do rovnice roviny:

$$-2 = 1 + 4t - 2s$$
$$2 = -3t + s$$
$$c_3 = -2 + 5t - s$$

Z první a druhé rovnice vypočítáme oba parametry, které dosadíme do rovnice třetí. Použijeme slučovací metody a sečteme první a druhou rovnici, kterou vynásobíme 2:

$$2 = 1 - 2t$$
$$t = -\frac{1}{2}, s = \frac{1}{2}$$

Nyní dosadíme do třetí rovnice:

$$c_3 = -2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -5$$

Bod C má souřadnice $C[-2, 2, -5]$.

Cvičení 4.

Napište parametrické vyjádření roviny dané bodem $M[3, 2, -1]$ a přímkou, která má parametrické vyjádření $x = 2 - t, y = 3 + 2t, z = -t;\ t \in R$.

Dejme tomu, že přímka je určená bodem A a směrovým vektorem $\mathbf{u}$. Z rovnice přímky zjistíme, že $A[2, 3, 0]$ a $\mathbf{u} = (-1, 2, -1)$. Pro určení parametrické rovnice roviny potřebujeme znát ještě jeden směrový vektor. Ten získáme z bodů A a M: $\boldsymbol{MA} = (-1, 1, 1)$ (Ověřte výpočtem, že vektor $\boldsymbol{MA}$ není rovnoběžný s vektorem $\mathbf{u}$.) Rovnici roviny získáváme například ve tvaru $X = A + t\mathbf{u} + s\mathbf{MA};\ s, t \in R$:

$$x = 2 - t - s$$
$$y = 3 + 2t + s$$
$$z = -t + s$$

Cvičení 5.

Zjistěte, zda body $A[1, -1, 0]$, $B[3, -2, 0]$, $C[6, -2, 1]$, $D[3, 1, 2]$ leží v jedné rovině.

Určíme rovnici roviny ABC a budeme zjišťovat zda bod D v této rovině leží.
Nejprve si vypočítáme souřadnice směrových vektorů $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{BC}$:

$$\mathbf{AB} = B - A = (2; -1; 0)$$

$$\mathbf{BC} = C - B = (3; 0; 1)$$

Pro parametrické vyjádření použijeme souřadnice bodu A a vektory $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{BC}$:

$$x = 1 + 2t + 3s$$
$$y = -1 - t$$
$$z = s$$

Dosadíme souřadnice bodu D za x, y, z do rovnice roviny:

$$3 = 1 + 2t + 3s$$
$$1 = -1 - t$$
$$2 = s$$

Ze třetí rovnice je hned vidět, že $s = 2$ a z druhé po menší úpravě, že $t = -2$. Ověříme toto řešení v první rovnici: $3 = 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 2$. Soustava má řešení $\rightarrow$ bod D leží v rovině ABC $\rightarrow$ bod A, B, C, D leží v jedné rovině.

Cvičení 6.

Rovina má parametrické vyjádření $x = 3 - 3t - 3s, y = -7t, z = 5s,\ \ t, s \in R$. Určete její průsečíky s osami soustavy souřadnic.

Nejprve je dobré si uvědomit, že body ležící na ose x mají y-ovou a z-ovou souřadnici rovnou nule. Podobě jsou tomu body ležící na ose y a z.

Řešme nejprve průsečík s osou x. Za y a z dosadíme 0:

$$x = 3 - 3t - 3s$$
$$0 = -7t$$
$$0 = 5s$$

Z druhé a třetí rovnice je vidět, že $s = 0$ a $t = 0$. Dosazením do první rovnice, získáme x-ovou souřadnici průsečíku roviny s osou x: $x = 3 - 3\cdot 0 - 3\cdot 0 = 3$. Průsečík s osou x má souřadnice $P_x[3, 0, 0]$.
Nyní průsečík s osou y. Za x a z dosadíme 0:

$$0 = 3 - 3t - 3s$$
$$y = -7t$$
$$0 = 5s$$

Z třetí rovnice je vidět, že $s = 0$. Dosazením do první rovnice, získáme hodnotu parametru $t = 1$. Dosazením obou parametrů do druhé rovnice získáme y-ovou souřadnici průsečíku roviny s osou y: $y = -7\cdot 1 = -7$. Průsečík s osou y má souřadnice $P_y[0, -7, 0]$.
Nyní průsečík s osou z. Za x a y dosadíme 0:

$$0 = 3 - 3t - 3s$$
$$0 = -7t$$
$$z = 5s$$

Z druhé rovnice je vidět, že $t = 0$. Dosazením do první rovnice, získáme hodnotu parametru $s = 1$. Dosazením obou parametrů do třetí rovnice získáme z-ovou souřadnici průsečíku roviny s osou z: $z = 5s = 5\cdot 1 = 5$. Průsečík s osou z má souřadnice $P_z[0, 0, 5]$.

Příklad 1.

Napište parametrické vyjádření roviny určené body:
a) $A[-1, -1, 0]$, $B[1, 1, 2]$, $C[2, 2, 3]$
b) $A[2, -3, 5]$, $B[1, 0, -4]$, $C[0, 2, 7]$
c) $A[1, 1, 0]$, $B[2, 2, 1]$, $C[0, 0, 0]$

Příklad 2.

Napište parametrické vyjádření roviny určené body A, B, C a zjistěte, zda v rovině ABC leží bod L, je-li dáno:
a) $A[2, -3, 5]$, $B[1, 0, -4]$, $C[0, 2, 7]$, $L[1, 5, 10]$
b) $A[1, 1, 0]$, $B[2, 2, 1]$, $C[0, 0, 0]$, $L[0, 0, 0]$

Příklad 3.

Napište parametrické vyjádření roviny dané bodem $M[-3, 1, -3]$ a přímkou, která má parametrické vyjádření $x = 1 - t,\ y = t,\ z = -2 + 3t;\ t \in R$.

Příklad 4.

Zjistěte, zda body A, B, C, D leží v jedné rovině:
a) $A[3, 2, 1]$, $B[1, 3, -1]$, $C[2, -1, 3]$, $D[-1, 2, -2]$
b) $A[1, 5, 2]$, $B[3, -6, 1]$, $C[-1, 1, 0]$, $D[-2, 1, -1]$
c) $A[1, 2, -2]$, $B[-3, 1, 3]$, $C[0, 3, 3]$, $D[-2, 1, 1]$

Příklad 5.

Rovina má parametrické vyjádření $x = 2t + 2s,\ y = 6 + 6t,\ z = 9s$, $t, s \in R$. Určete její průsečíky s osami soustavy souřadnic.

Obecná rovnice roviny

$$ax + by + cz + d = 0,$$

kde alespoň jeden z koeficientů a, b, c je různý od nuly a vektor $\mathbf{n} = (a; b; c)$ nazýváme normálovým vektorem roviny, který je výsledkem vektorového součinu směrových vektorů roviny.

Cvičení 7.

Rozhodněte, zda bod $A[2, 1, 3]$ leží v rovině dané obecnou rovnicí $3x - y + 2z - 11 = 0$.

Dosadíme souřadnice bodu A do rovnice roviny. Pokud bude splněna rovnost, leží bod v rovině, pokud rovnost splněna nebude, bod v rovině neleží.
$3 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 3 - 11 = 0 \rightarrow$ rovnost je splněna $\rightarrow$ bod A leží v rovině.

Cvičení 8.

Určete číslo d tak, aby rovina daná obecnou rovnicí $7x - 8y - 2z + d = 0$ procházela bodem A[7, 6, –3].

Dosazením souřadnic bodu A do rovnice, získáme rovnici o jedné neznámé, ze které vypočítáme d:

$$7 \cdot 7 - 8 \cdot 6 - 2 \cdot (-3) + d = 0$$
$$7 + d = 0$$
$$d = -7$$

Rovnice má tvar: $7x - 8y - 2z - 7 = 0$.

Cvičení 9.

Napište obecnou rovnici roviny procházející body $A[1, 3, -1]$, $B[2, 3, 3]$, $C[-2, -5, -7]$.

Obecnou rovnici získáme vyloučením parametrů z parametrického tvaru. Napišme nejdříve parametrické vyjádření. Vypočítáme souřadnice směrových vektorů ***AB*** a ***BC***:

$\mathbf{AB} = (1;0;4)$

$\mathbf{BC} = (-4;-8;-10)$

Pro parametrické vyjádření použijeme souřadnice bodu *A* a vektory ***AB*** a ***BC***:

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + t - 4s \quad / \cdot (-4) \\ y &= 3 - 8s \\ z &= -1 + 4t - 10s \end{aligned}\right] +$$

$$\left.\begin{aligned} -4x + z &= -5 + 6s \quad / \cdot 8 \\ y &= 3 - 8s \quad / \cdot 6 \end{aligned}\right] +$$

$$-32x + 6y + 8z + 22 = 0 \quad /:2$$

$$-16x + 3y + 4z + 11 = 0$$

Rovnice má tvar: $-16x + 3y + 4z + 11 = 0$.

Poznámka.

Je možné postupovat i pomocí normálového vektoru, který získáme vektorovým součinem vektorů ***AB***, ***BC***. Po dosazení jednoho z daných bodů dopočítáme všechny koeficienty.

$\mathbf{AB} \times \mathbf{BC} = (AB_2BC_3 - BC_2AB_3; AB_3BC_1 - BC_3AB_1; AB_1BC_2 - BC_1AB_2) =$

$= (0 \cdot (-10) - (-8) \cdot 4; 4 \cdot (-4) - (-10) \cdot 1; 1 \cdot (-8) - (-4) \cdot 0) = (32;-6;-8)$

Získáváme: $32x - 6y - 8z + d = 0$. Dosazením souřadnic bodu *A*, získáme poslední koeficient *d*.

Cvičení 10.

Určete obecnou rovnici roviny, která prochází bodem A[–3, 5, –7] a je kolmá k vektoru **n** = (1, –2, –1).

Souřadnice vektoru **n** jsou souřadnice normálového (kolmého) vektoru roviny. Proto platí: $x - 2y - z + d = 0$. Dosazením souřadnic bodu *A* dopočítáme *d*: $-3 - 2 \cdot 5 - 7 + d = 0 \rightarrow d = 6$.
Rovnice roviny je $x - 2y - z + 6 = 0$.

Cvičení 11.

Napište obecnou rovnici roviny, která je určena bodem A[2, –3, 1] a přímkou mající parametrické vyjádření $x = t, y = 2 + 3t, z = 1 - t;\ t \in R$.

Z rovnice přímky známe směrový vektor a bod (nazvěme je např. *B*, **u**): B[0, 2, 1], **u** = (1, 3, –1). Pro určení roviny musíme znát ještě jeden směrový vektor, který získáme z bodů *A*, *B*:
$\mathbf{AB} = (-2;5;0)$. Parametrická rovnice roviny je:

$$x = t - 2s$$

$$y = 2 + 3t + 5s$$

$$z = 1 - t$$

Vyloučením parametrů získáme rovnici obecnou:

$$\begin{array}{rl} x = t - 2s & /\cdot 5 \\ y = 2 + 3t + 5s & /\cdot 2 \\ z = 1 - t & \\ \hline 5x + 2y = 4 + 11t & \\ z = 1 - t & /\cdot 11 \\ \hline 5x + 2y + 11z - 15 = 0 & \end{array}$$

Obecná rovnice roviny je $5x + 2y + 11z - 15 = 0$.

Cvičení 12.

Napište obecnou rovnici roviny, která prochází body A[3, 2, –1], B[4, 1, 1] a je rovnoběžná s přímkou mající parametrické vyjádření $x = 5 - t,\ y = -3 + 3t,\ z = 4 + 2t;\ t \in R$

Z rovnice přímky použijeme její směrový vektor (nazvěme ho např. **u**): **u** = (–1, 3, 2). Rovnice roviny je tedy dána ve tvaru $X = A + t\mathbf{AB} + s\mathbf{u}$:

$$\begin{array}{rl} x = 3 + t - s & \\ y = 2 - t + 3s & \\ z = -1 + 2t + 2s & \\ \hline x + y = 5 + 2s & /\cdot(-4) \\ 2y + z = 3 + 8s & \\ \hline -4x - 2y + z + 17 = 0 & \end{array}$$

Obecná rovnice roviny je $-4x - 2y + z + 17 = 0$.

Příklad 6.

Rozhodněte, zda body A[–1, –8, 0], B[0, –7, 2], C[17, 14, –13] leží v rovině dané obecnou rovnicí $3x - y + 2z - 11 = 0$.

Příklad 7.

Napište obecnou rovnici roviny procházející body
a) $A[-4, -1, 3]$, $B[1, 1, 6]$, $C[6, 3, 2]$
b) $A[2, -3, 1]$, $B[0, 0, 0]$, $C[-2, 1, -5]$

Příklad 8.

Napište obecnou rovnici roviny, která prochází body $A[4, -1, 2]$, $B[2, 0, -1]$ a je rovnoběžná s přímkou CD, $C[3, 2, -4]$, $D[1, -1, -3]$.

Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cirjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčik, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.