I N V E S T I C E D O R O Z V O J E V Z D Ě L Á V Á N Í

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA

3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

Vzdálenost bodu X od přímky p v rovině

Vzdálenost bodu $X[x_0, y_0]$ od přímky dané rovnicí $ax + by + c = 0$ je vyjádřena vzorcem

$$v(X, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Cvičení 1.

Vypočítejte vzdálenost bodu $A[1; 3]$ od přímky s parametrickým vyjádřením
$x = 1 - 3t,\ y = -2 + 4t; t \in R$.

Nejprve převedeme parametrický tvar rovnice přímky na obecný vyloučením parametru:

$$\begin{array}{l} x = 1 - 3t \quad / \cdot 4 \\ y = -2 + 4t \quad / \cdot 3 \\ \hline 4x = 4 - 12t \\ 3y = -6 + 12t \\ \hline 4x + 3y + 2 = 0 \end{array}$$

Nyní dosadíme do vzorce:

$$\frac{|4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

Příklad 1.

Vypočítejte vzdálenost bodu $B[3; -7]$ od přímky dané rovnicí $4x - 3y + 7 = 0$.

Vzdálenost bodu X od přímky p v prostoru

Vzdálenost bodu X od přímky p vypočteme ze vzorce

$$v(X, p) = \frac{|XM \times u|}{|u|}$$

Kde **u** je směrový vektor p a M je libovolný bod přímky p.

Poznámka.

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek počítáme stejně. Bod X volíme jako libovolný bod jedné přímky.

Cvičení 2.

Vypočítejte vzdálenost bodu $A[5;-1; 3]$ od přímky s parametrickým vyjádřením
$x = -1 + 2t,\ y = -5 + 3t,\ z = -2 + 2t; t \in R$.

Z přímky známe bod $M[-1;-5;-2]$. Určíme souřadnice vektoru **AM** = (–6; –4; –5). A nyní dosadíme do vzorce:

$$\frac{\left|(-6;-4;-5)\times(2;3;2)\right|}{\sqrt{2^2+3^2+2^2}}=\frac{\sqrt{7^2+2^2+(-10)^2}}{\sqrt{17}}=\sqrt{9}=3$$

Příklad 2.

Určete vzdálenost bodu $X[3;-1;4]$ od přímky AB, je-li $A[0;2;1]$, $B[1;3;0]$.

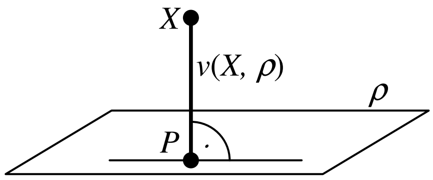
Příklad 3.

Určete vzdálenost bodu $B[1;2;3]$ od přímky určené bodem $A[5;10;-1]$ a směrovým vektorem $\mathbf{u}=(-1;-2;1)$.

Vzdálenost bodu X od roviny ρ

Vzdálenost bodu $X[x_0; y_0; z_0]$ od roviny ρ: $ax + by + cz + d = 0$ v prostoru určíme ze vzorce

$$v(X,\rho)=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$



Cvičení 3.

Vypočítejte vzdálenost bodu $A[3;5;-6]$ od roviny ρ: $2x-2y+z-8=0$.

Dosadíme do vzorce:

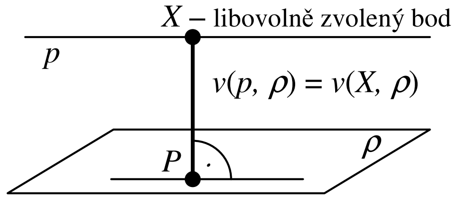
$$\frac{\left|2\cdot3-2\cdot5-6-8\right|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{18}{3}=6$$

Příklad 4.

Vypočítejte vzdálenost bodu $A[-1;3;2]$ od roviny ρ: $3x-4y+5z+15=0$.

Vzdálenost přímky p od roviny ρ

Vzdálenost přímky p od roviny ρ (přímka p je s ρ rovnoběžná) určíme jako vzdálenost jejího libovolně zvoleného bodu od roviny ρ. Stejně určíme i vzdálenost dvou rovnoběžných rovin.



Cvičení 4.

Vypočítejte vzdálenost přímky $p: x=-1+2t,\ y=3+4t,\ z=3t; t\in R$ od roviny $\rho: 3x-3y+2z-5=0$.

Libovolný bod přímky je vidět již ze zadání → $A[-1; 3; 0]$. Nyní již můžeme dosadit do vzorce pro vzdálenost bodu od roviny:

$$\frac{\left|3\cdot(-1)-3\cdot 3+2\cdot 0-5\right|}{\sqrt{3^2+(-3)^2+2^2}}=\frac{17}{\sqrt{22}}=\frac{17\sqrt{22}}{22}$$

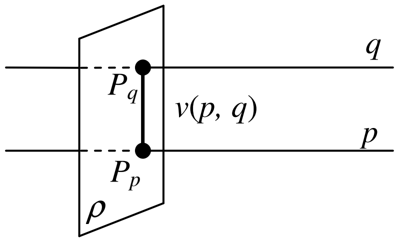
Příklad 5.

Vypočítejte vzdálenost přímky $p: x=2-t,\ y=3t,\ z=3+4t; t\in R$ od roviny $\rho: x-5y+4z-6=0$.

Příklad 6.

Určete vzdálenost roviny $\rho: x=2+3u-v,\ y=1-9u+v,\ z=-3-12u-2v; u,v\in R$ a roviny $\sigma: x=1-2s+t,\ y=2s-3t,\ z=2-4s-4t; s,t\in R$

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek



Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek p, q určíme tak, že vedeme libovolnou kolmou rovinu k oběma rovnoběžkám, určíme průsečíky P_p, P_q roviny s těmito přímkami p a q a pak je vzdálenost p, q rovna vzdálenosti průsečíků P_p, P_q.

Cvičení 5.

Určete vzdálenost přímek $p: x = 2 + 3t,\ y = -1 + 2t,\ z = 1 - t, t \in R$,
$q: x = 1 + 3s,\ y = 2 + 2s,\ z = -3 - s, s \in R$.

Na přímce q zvolíme libovolný bod $Pq[1; 2; -3]$ a na přímce p bod $P_p[2 + 3t_p; -1 + 2t_p; 1 - t_p]$. Známe vektor $\mathbf{u} = (3; 2; -1)$. Nejkratší vzdálenost měříme na kolmici, proto již stačí zajistit, aby vektor $\mathbf{P}_p\mathbf{P}_q$ byl kolmý na vektor $\mathbf{u}$, nebo-li musí platit $\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_p\mathbf{P}_q = 0$. (Vektor $\mathbf{P}_p\mathbf{P}_q = (-1 - 3t_p; 3 - t_p; -4 + t_p)$). Dosazením vypočítáme t_p:

$$3\left(-1-3t_p\right)+2\left(3-2t_p\right)-\left(-4+t_p\right)=0$$
$$-3-9t_p+6-4t_p+4-t_p=0$$
$$-14t_p=-7$$
$$t_p=\frac{1}{2}$$

Nyní již známe souřadnice bodu $P_p\left[\frac{7}{2};0;\frac{1}{2}\right]$ a můžeme vypočítat vzdálenost bodů P_p a P_q:

$$\left|P_pP_q\right|=\sqrt{\left(1-\frac{7}{2}\right)^2+\left(2-0\right)^2+\left(-3-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{16}{4}+\frac{49}{4}}=\sqrt{\frac{90}{4}}=\frac{3}{2}\sqrt{10}.$$

Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cirjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčik, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.