



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

## Výukový materiál pro předmět

# MATEMATIKA

## 3. ročník

Reg. č. projektu:	CZ.1.07/1.1.10/01.0007
Název projektu:	<b>Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP</b>
Název příjemce:	<b>Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1</b>
Klíčová aktivita:	Využití ICT ve výuce matematiky
Použitá literatura:	Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

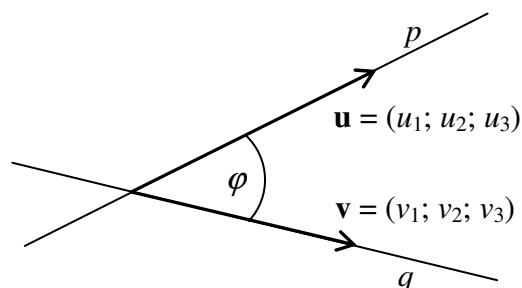
## Odchylka dvou přímek

Odchylku dvou přímek  $p, q$  určíme pomocí skalárního součinu směrových vektorů  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ :

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}, \text{ kde } \varphi \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle.$$

### Poznámka.

Odchylku můžeme počítat i v případě, že známe normálové vektory.



### Cvičení 1.

Zjistěte odchylku přímky  $p: x - 3 = 0$  a přímky  $q: x\sqrt{3} - y + 5 = 0$ .

Normálové vektory jsou:  $\mathbf{n}_p = (1; 0)$  a  $\mathbf{n}_q = (\sqrt{3}; -1)$ .

Po dosazení do vzorce získáváme:

$$\cos \varphi = \frac{|(1; 0) \cdot (\sqrt{3}; -1)|}{\sqrt{1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \varphi = 30^\circ$$

### Příklad 1.

Zjistěte odchylku přímek  $r_1$  a  $r_2$ :

a)  $r_1: x = 1 + t, y = -2 - t, t \in \mathbb{R}$

$$r_2: y = 3x - 1$$

b)  $r_1: x + 3y - 6 = 0$

$$r_2: -2x + y + 6 = 0$$

c)  $r_1: k = -\frac{1}{2}; M[4; 3] \in r_1$

$$r_2: x = 3 + 4t, y = -2 - t, t \in \mathbb{R}$$

d)  $r_1: 5x + y + 3 = 0$

$$r_2: y = -5x + 2$$

e)  $r_1: 3x - 2y + 4 = 0$

$$r_2: -x + 5y = 0$$

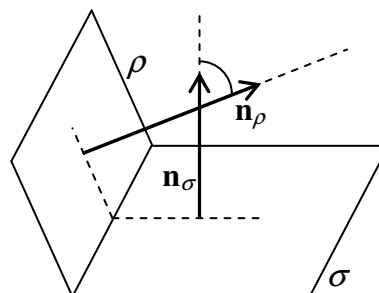
f)  $r_1: A[2; 4] \in r_1, B[-2; 1] \in r_1$

$$r_2: y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

### Odchylka dvou různoběžných rovin

Odchylku dvou různoběžných rovin  $\rho$ ,  $\sigma$  určíme pomocí normálových vektorů  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$ :

$$\cos \alpha = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}, \text{ kde } \alpha \in \langle 0^\circ, 90^\circ \rangle.$$



#### Cvičení 2.

Vypočítejte odchylku roviny dané obecnou rovnicí  $3x + 5 = 0$  a roviny s parametrickým vyjádřením  $x = 3 + r - 2s$ ,  $y = 2 - r + 2s$ ,  $z = -1 - 4r$ ;  $r, s \in \mathbb{R}$

Parametrické vyjádření druhé roviny převedeme na obecnou rovnici vyloučením parametrů:

$$x = 3 + r - 2s$$

$$y = 2 - r + 2s$$

$$z = -1 - 4r$$

$$x + y - 5 = 0$$

Určíme normálové vektory:

$$\mathbf{n}_1 = (3; 0; 0)$$

$$\mathbf{n}_2 = (1; 1; 0)$$

Po dosazení do vzorce získáváme:

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

#### Cvičení 3.

Vypočítejte odchylku dvou rovin daných obecnými rovnicemi:

$$\rho: x + y + 2z - 5 = 0, \quad \sigma: x - 2y - z + 3 = 0$$

Určíme normálové vektory:

$$\mathbf{n}_\rho = (1; 1; 2)$$

$$\mathbf{n}_\sigma = (1; -2; -1)$$

Po dosazení do vzorce získáváme:

$$\cos \alpha = \frac{|1 - 2 - 2|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

#### Příklad 2.

Vypočítejte odchylku dvou rovin daných obecnými rovnicemi:

a)  $\rho: 3x - 4y + z - 6 = 0$ ,  $\sigma: 2x + y - 2z + 1 = 0$

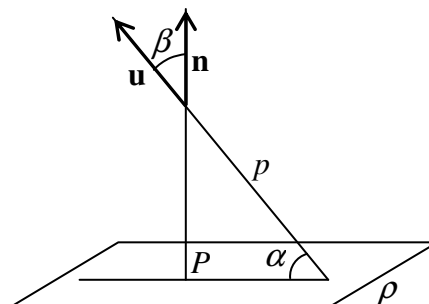
b)  $\rho: 3x + 4y - 5z - 6 = 0$ ,  $\sigma: 4x - 5y + 3z + 2 = 0$

### Odchylka přímky $p$ od roviny $\rho$

Odchylku přímky  $p$  od roviny  $\rho$  vypočteme podle vzorce

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{u}| |\mathbf{n}|}$$

$\mathbf{n}$  je normálový vektor  $\rho$  a  $\mathbf{u}$  je směrový vektor  $p$ .



### Cvičení 4.

Určete odchylku přímky s parametrickým vyjádřením  $x = 5 + t, y = 1 + 3t, z = -2t; t \in R$  a roviny dané obecnou rovnicí  $2x - y + 3z - 4 = 0$ .

Určíme směrový vektor přímky a normálový vektor roviny:

$$\mathbf{u}_p = (1; 3; -2)$$

$$\mathbf{n}_\rho = (2; -1; 3)$$

Po dosazení do vzorce získáváme:

$$\sin \alpha = \frac{|2 - 3 - 6|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 30^\circ$$

### Příklad 3.

Je dána přímka  $p: x = 1 + t, y = 2 - t, z = t; t \in R$ , rovina  $\rho: 3y + 8 = 0$  a rovina

$\sigma: x = 5 - r - 3s, y = 16 + r - 3s, z = 3 + 4r; r, s \in R$ .

a) Vypočítejte odchylku přímky  $p$  a roviny  $\rho$ .

b) Vypočítejte odchylku přímky  $p$  a roviny  $\sigma$ .

c) Určete odchylku rovin  $\rho$  a  $\sigma$ .

**Příklad 4.**

Určete odchylku přímky  $p$  s parametrickým vyjádřením  $p : x = -1 - t, y = -1 + 3t, z = t; t \in \mathbb{R}$  a souřadnicové roviny  $xy$ .

**Příklad 5.**

Je dáno:

$$p : x - y + z + 1 = 0$$

$$x + y + 3z - 3 = 0$$

$$\rho : x - y + z = 0$$

- a) Vypočítejte odchylku přímky  $p$  a roviny  $\rho$ .
- b) Určete průnik přímky  $p$  a roviny  $\rho$ .

## Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cířjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčík, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.