INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA

3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

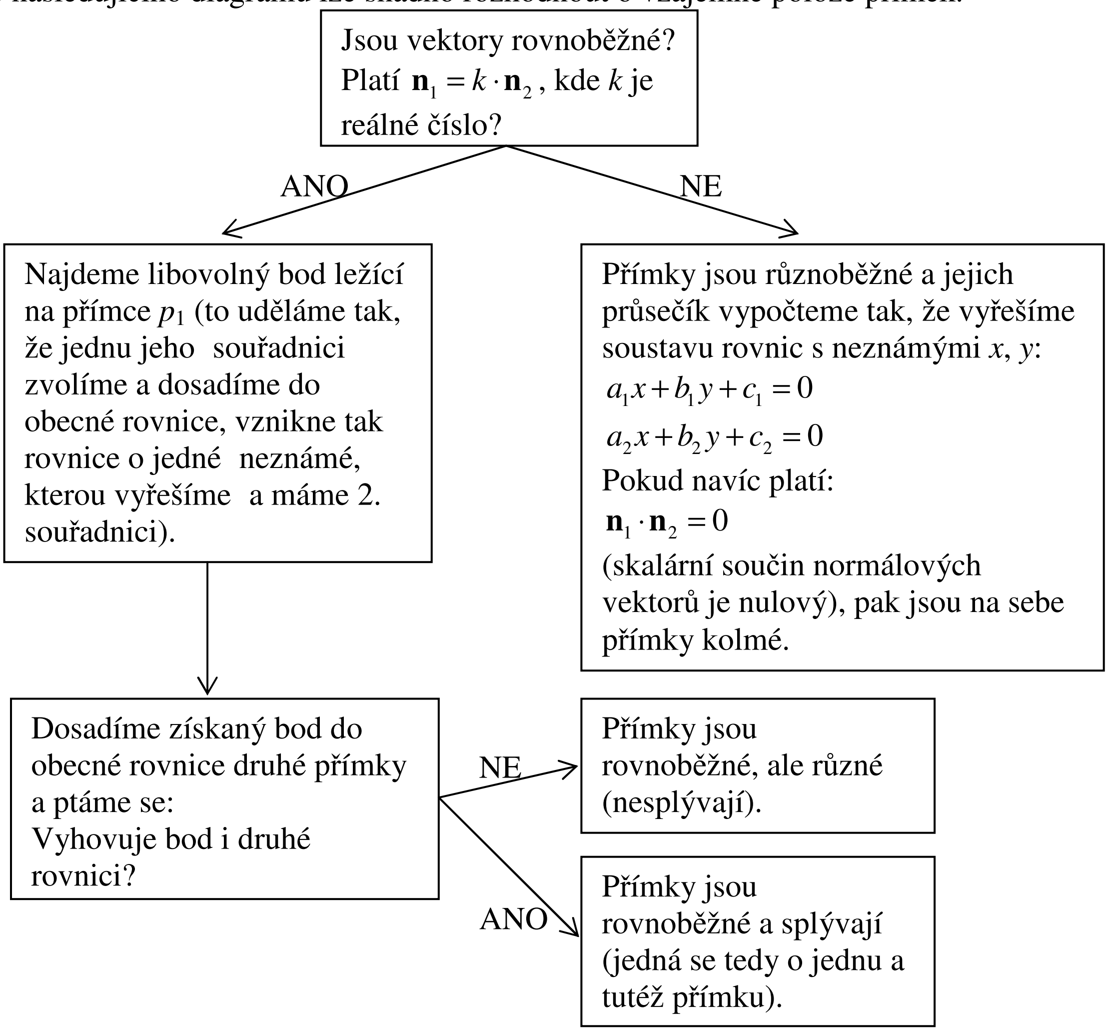
Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

Vzájemné polohy v rovině

Mějme 2 přímky $p_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $p_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$, pak pro normálové vektory platí: $\mathbf{n}_1 = (a_1, b_1)$, $\mathbf{n}_2 = (a_2, b_2)$.

Podle následujícího diagramu lze snadno rozhodnout o vzájemné poloze přímek.



Poznámka:

Výše uvedený diagram lze snadno využít i v případě přímek zadaných parametricky – pak nemusíme hledat bod, neboť je ho možné ihned vyčíst z rovnic. Podmínku rovnoběžnosti pak klademe samozřejmě na směrové vektory.

Poznámka:

Vzájemnou polohu dvou přímek můžeme určit také tak, že řešíme soustavu rovnic (buď 2 rovnice, pokud máme obecné vyjádření, nebo 4 rovnice, jestliže použijeme parametrické vyjádření) – mohou nastat 3 možnosti:

1. Soustava nemá řešení → přímky jsou rovnoběžné různé.
2. Soustava má právě jedno řešení → přímky jsou různoběžné a řešení soustavy je jejich průsečík. Pokud chceme zjistit, zda jsou přímky kolmé, ověřujeme podmínku: $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ (v případě obecného vyjádření) nebo $1 + k_1k_2 = 0$, kde k_1, k_2 jsou směrnice.
3. Soustava má nekonečně mnoho řešení → přímky jsou rovnoběžné a splývají.

Cvičení 1.

Určete vzájemnou polohu přímek $p(A,\mathbf{u})$, $q(B,\mathbf{v})$, je-li $A[3,-1], \mathbf{u}=(-2,1)$, $B[4,-2], \mathbf{v}=(1,-2)$.

Budeme postupovat podle diagramu. Nejdříve zjistíme, zda vektory jsou rovnoběžné (zda jeden je *k*-násobkem druhého): $\mathbf{u}=k\cdot\mathbf{v}$. Po dosazení získáváme: $(-2,1)=k\cdot(1,-2)$ $\rightarrow$ získáme dvě rovnice:

$$\begin{aligned} -2 &= k \\ 1 &= -2k \quad \rightarrow k=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Získali jsme dvě různé hodnoty pro *k*. Vektory nejsou rovnoběžné $\rightarrow$ přímky jsou různoběžné.

Cvičení 2.

Určete vzájemnou polohu přímek *p*, *q*. Jsou-li přímky různoběžné, určete jejich průsečík.
$p: x=3-2t, y=4+3t;\ t\in R$, $q: x=6+3s, y=-0{,}5-4{,}5s;\ s\in R$
Mohli bychom postupovat jako v předchozím cvičení, pak bychom řešili rovnost:
$(-2;3)=k\cdot(3;-4{,}5)$.

Zkusme příklad řešit jako soustavu 4 rovnic o 4 neznámých.

$$\begin{aligned} x &= 3-2t \\ y &= 4+3t \\ x &= 6+3s \\ y &= -0{,}5-4{,}5s \end{aligned}$$

S výhodou použijeme méně často využívanou metodu – srovnávací. Porovnáním 1. a 3. rovnice a 2. a 4. rovnice získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých *s*, *t*:

$$\begin{aligned} 3-2t &= 6+3s \\ 4+3t &= -0{,}5-4{,}5s \end{aligned}$$

Po úpravě získáváme:

$$\begin{aligned} -2t-3s &= 3 \qquad /\cdot 3 \\ 3t+4{,}5s &= -4{,}5 \quad /\cdot 2 \end{aligned}$$

Po roznásobení:

$$\begin{aligned} -6t-9s &= 9 \\ 6t+9s &= -9 \end{aligned}$$

Sečtením obou rovnic získáváme výraz 0 = 0, což je pravdivé tvrzení $\rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení $\rightarrow$ přímky mají společně nekonečně mnoho bodů $\rightarrow$ jsou rovnoběžné, totožné.

Cvičení 3.

Určete vzájemnou polohu přímek *p*, *q*. Jsou-li přímky různoběžné, určete jejich průsečík.
$p: 2x-y+3=0$, $q: x=3+2t, y=t;\ t\in R$
S výhodou budeme příklad řešit opět jako soustavu tří rovnic o třech neznámých:

$$\begin{aligned} 2x-y+3 &= 0 \\ x &= 3+2t \\ y &= t \end{aligned}$$

Využijeme dosazovací metody a dosadíme 2. a 3. rovnici do rovnice první:

$$2(3+2t)-t+3=0$$
$$6+4t-t+3=0$$
$$3t=-9$$
$$t=-3 \Rightarrow x=-3,\ y=-3$$

Soustava má právě jedno řešení → přímky mají jeden společný bod → přímky jsou různoběžné. Souřadnice jejich průsečíku jsou hodnoty *x*, *y*: *P*[–3; –3].

Příklad 1.

Určete vzájemnou polohu přímek $p(A,\mathbf{u})$, $q(B,\mathbf{v})$, je-li dáno:

a) $A[5,2], \mathbf{u}=(6,-9)$, $B[3,5], \mathbf{v}=(-1;1,5)$

b) $A[1,-2], \mathbf{u}=\left(\frac{1}{2},3\right)$, $B[2,4], \mathbf{v}=\left(\frac{1}{3},2\right)$

c) $A[7,-4], \mathbf{u}=(-2,3)$, $B[3,-2], \mathbf{v}=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$

Příklad 2.

Určete vzájemnou polohu přímek p, q. Jsou-li přímky různoběžné, určete jejich průsečík.

a) $p: x = 1 + 4t,\ y = -t;\ t \in R$, $q: x = 3 - 12s,\ y = -2 + 3s;\ s \in R$

b) $p: x = -1 + t,\ y = 5 - 3t;\ t \in R$, $q: x = 5 - 3s,\ y = -1 + s;\ s \in R$

Příklad 3.

Určete vzájemnou polohu přímek p, q. Jsou-li přímky různoběžné, určete jejich průsečík.

a) $p: 3x + y - 10 = 0$, $q: x = 4 - t, y = -2 + 3t;\ t \in R$

b) $p: 5x - 2y + 6 = 0$, $q: x = -1 + 2t, y = 4 + 5t;\ t \in R$

c) $p: 4x - 3y + 5 = 0$, $q: x = -2 + 5t, y = 3 + 4t;\ t \in R$

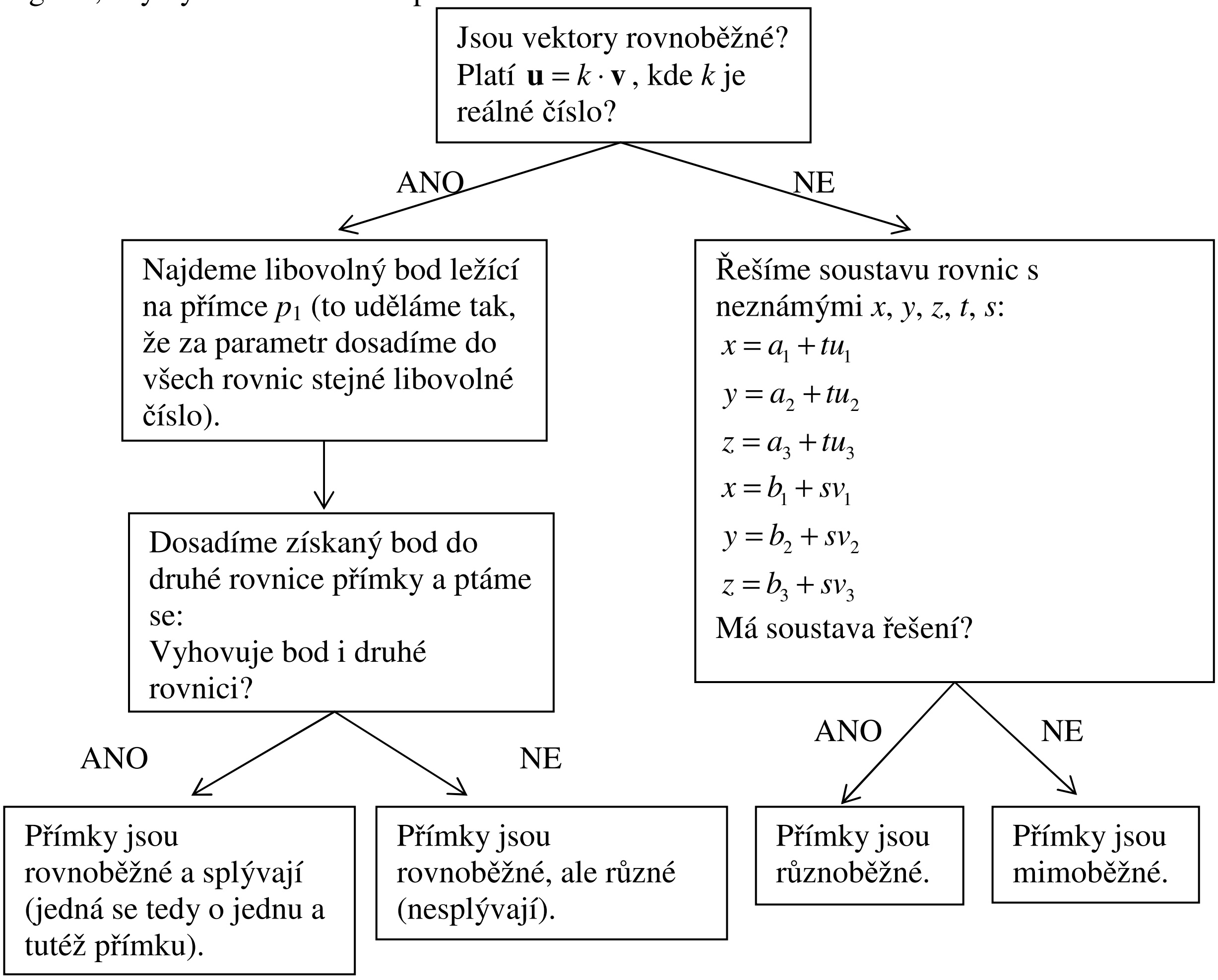
Vzájemné polohy v prostoru

Mějme 2 přímky

$p_1 : x = a_1 + tu_1; y = a_2 + tu_2; z = a_3 + tu_3;\ t \in R$,

$p_2 : x = b_1 + sv_1; y = b_2 + sv_2; z = b_3 + sv_3;\ s \in R$, pak pro směrové vektory platí: $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

V prostoru bude situace stejná jako v rovině. Přibude nám možnost mimoběžnosti. Upravme náš diagram, aby vyhovoval řešení v prostoru.



Poznámka:

Vzájemnou polohu dvou přímek můžeme určit také tak, že řešíme soustavu rovnic – mohou nastat 4 možnosti:

1. Soustava nemá řešení $\rightarrow$ přímky jsou rovnoběžné různé.
2. Soustava má nekonečně mnoho řešení $\rightarrow$ přímky jsou rovnoběžné a splývají.
3. Soustava má právě jedno řešení vyhovující všem rovnicím $\rightarrow$ přímky jsou různoběžné.
4. Soustava má právě jedno řešení vyhovující jen některým rovnicím $\rightarrow$ přímky jsou mimoběžné.

Cvičení 4.

Určete vzájemnou polohu přímek p, q. Jsou-li přímky různoběžné, určete jejich průsečík.

$p : x = 8 - 4t, y = 4 + 8t, z = -12t;\ t \in R$, $q : x = 3 + 3s, y = 1 - 6s, z = -2 + 9s;\ s \in R$

Zkusme příklad řešit jako soustavu rovnic:

$$x = 8 - 4t$$
$$y = 4 + 8t$$
$$z = -12t$$
$$x = 3 + 3s$$
$$y = 1 - 6s$$
$$z = -2 + 9s$$

S výhodou použijeme méně často využívanou metodu – srovnávací. Porovnáním 1. a 4., 2. a 5., 3. a 6. rovnice získáme soustavu tří rovnic o dvou neznámých s, t:

$$8 - 4t = 3 + 3s$$
$$4 + 8t = 1 - 6s$$
$$-12\,t = -2 + 9s$$

Vybereme první dvě rovnice a řešíme:

$$8 - 4t = 3 + 3s \quad / \cdot 2$$
$$4 + 8t = 1 - 6s$$

Po roznásobení a upravení:

$$-8t - 6s = -10$$
$$8t + 6s = -3$$

Sečtením obou rovnic získáváme výraz 0 = –13, což je nepravdivé tvrzení → soustava nemá řešení → přímky nemají společný bod → jsou rovnoběžné, různé.

Příklad 4.

Určete vzájemnou polohu přímek p, q. Jsou-li přímky různoběžné, určete jejich průsečík.

a) $p : x = 3 - t, y = -2 + 2t, z = 3t;\ t \in R,\ q : x = 2 + s, y = 1 - s, z = 2 + 3s;\ s \in R$

b) $p : x = 1 - t, y = 2 + t, z = -6 - 2t;\ t \in R,\ q : x = 4 + s, y = -1 - s, z = 2s;\ s \in R$

c) $p : x = 3 - t, y = -2 + 2t, z = 3t;\ t \in R,\ q : x = 2 + s, y = 1 - s, z = 9 + 3s;\ s \in R$

Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cirjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčik, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.