I N V E S T I C E   D O   R O Z V O J E   V Z D Ě L Á V Á N Í

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA

3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

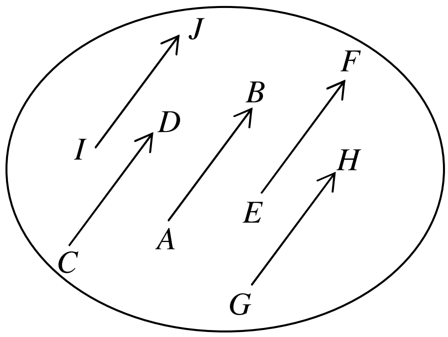
Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

Orientovaná úsečka

Mějme dvojici bodů *A*, *B* (na přímce, v rovině nebo prostoru), které spojíme a vznikne tak úsečka. Pokud budeme rozlišovat, zda je spojíme od *A* k *B* nebo od *B* k *A*, říkáme, že vzniká **orientovaná úsečka *AB*** (pokud spojujeme od *A* k *B*) nebo *BA* (opačně) a první bod (v případě orientované úsečky *AB* je to bod *A*) nazýváme *počátečním bodem* a druhý (v případě *AB* bod *B*) *koncovým bodem*.
Pokud platí $A = B$, pak úsečku nazýváme *nulovou orientovanou úsečkou AA*, která má týž počáteční i koncový bod *A*.
Velikost orientované úsečky *AB* je velikost úsečky *AB* („bez orientace") – tedy vzdálenost bodů *A* a *B*.

Vektory



Vektor je objekt, který získáme tak, že „namnožíme“ orientovanou úsečku *AB*. Každá orientovaná úsečka *AB* nám určuje směr a velikost (vzdálenost mezi *A*, *B*) a zároveň je umístěna v prostoru (rovině, přímce), což umožňují pevně dané body *A*, *B*. Pokud zachováme pouze směr a velikost a „zkopírujeme“ *AB* kamkoliv (vznikne tím další orientovaná úsečka s jinými body), vznikne nekonečně mnoho kopií *AB* a získáme vektor. Úsečky na obrázku jsou pak umístění vektoru, což zapisujeme $\mathbf{u} = AB$ nebo $\mathbf{u} = GH$.

Z toho již vyplývá definice vektoru:

Vektor je množina všech souhlasně orientovaných úseček téže velikosti.

Nulový vektor (označujeme – **o**) je množina všech nulových orientovaných úseček.

Poznámka.

V některých literaturách se pro označení vektoru také používá symbolu $\vec{u}$.

Souřadnice vektorů

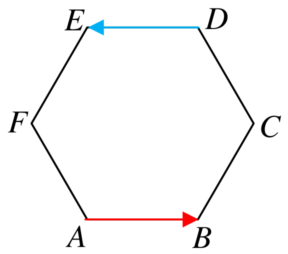
Mějme vektor **u** (nenulový) a jedno jeho umístění *AB* (orientovaná úsečka). Bod *A* má souřadnice $[a_1; a_2; a_3]$ (v prostoru jsou souřadnice 3, v rovině 2 a na přímce 1) a bod $B\ [b_1; b_2; b_3]$, pak pro souřadnice vektoru **u** platí $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $u_3 = b_3 - a_3$, což zapisujeme $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$ (v rovině má vektor pouze dvě souřadnice a na přímce jen jednu).
Nulový vektor má souřadnice $\mathbf{o} = (0; 0; 0)$.

Cvičení 1.

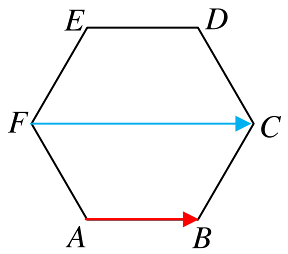
Je dán pravidelný šestiúhelník *ABCDEF* se středem *S* kružnice opsané. Rozhodněte, které z uvedených dvojic orientovaných úseček mají týž směr:
a) *AB*, *DE* b) *AB*, *FC* c) *ES*, *EB* d) *AB*, *EF* e) *AB*, *ED* f) *CS*, *FC*

Nakreslíme obrázky každé situace a podle směru šipek rozhodneme:

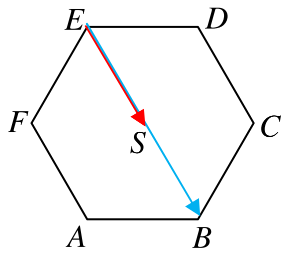
a) šipky směřují opačným směrem → úsečky nemají stejný směr



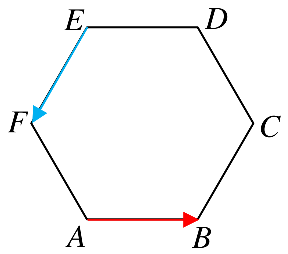
b) šipky směřují stejným směrem → úsečky mají stejný směr



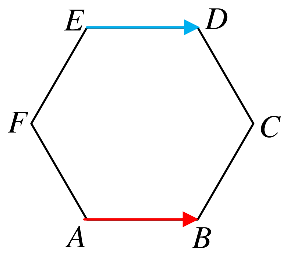
c) šipky směřují stejným směrem → úsečky mají stejný směr



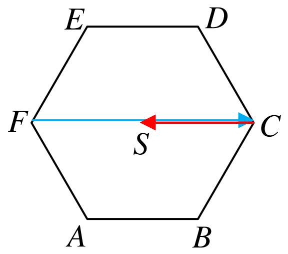
d) šipky směřují různým směrem → úsečky nemají stejný směr



e) šipky směřují stejným směrem → úsečky mají stejný směr



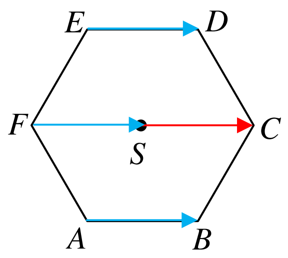
f) šipky směřují opačným směrem → úsečky nemají stejný směr



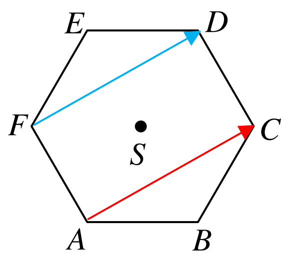
Cvičení 2.

Zobrazte pravidelný šestiúhelník *ABCDEF* a jeho střed označte *S*. Pomocí uvedených sedmi bodů (vrcholů a středu šestiúhelníku) zapište všechna možná umístění vektoru
a) **u** = *SC*   b) **v** = *AC*.

Nakreslíme šestiúhelník a vyznačíme zadané umístění vektoru. Poté postupně umisťujeme daný vektor na jiná místa:
a) **u** = *AB*, **u** = *ED*, **u** = *FS*,



b) **v** = *AC*, **v** = *FD*



Cvičení 3.

V rovině jsou dány bod *A*, *B*. Vypočítejte vektor **v** = *AB*, je-li dáno:
a) *A*[3, 2], *B*[–2, 4]
b) *A*[3, 2, –1], *B*[2, 2, 1]

Dosadíme do vzorce pro výpočet souřadnic vektoru.
a) $\mathbf{v} = (v_1; v_2)$

$v_1 = b_1 - a_1$ $v_2 = b_2 - a_2$
$v_1 = -2 - 3 = -5$ $v_2 = 4 - 2 = 2$

$\mathbf{v} = (-5; 2)$

b) $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$

$v_1 = b_1 - a_1$ $v_2 = b_2 - a_2$ $v_3 = b_3 - a_3$
$v_1 = 2 - 3 = -1$ $v_2 = 2 - 2 = 0$ $v_3 = 1 - (-1) = 2$

$\mathbf{v} = (-1; 0; 2)$

Cvičení 4.

Zjistěte, zda orientovaná úsečka *AB* je umístěním vektoru **u** = (5, –3), je-li dáno *A*[–3, 2], *B*[2, –1].

$AB = (2-(-3); -1-2) = (5; -3)$ → úsečka je umístěním vektoru **u**.

Cvičení 5.

Zjistěte, zda orientovaná úsečka *CD* je umístěním vektoru **v** = (3, 1, –4), je-li dáno *C*[2, –3, 1], *D*[5, –2, –3].

$CD = (5-2, -2-(-3), -3-1) = (3, 1, -4)$ → úsečka je umístěním vektoru **v**.

Cvični 6.

Orientovaná úsečka *AB* je umístěním vektoru **u**. Určete souřadnice koncového bodu *B*, je-li dáno *A*[1, 7], **u** = (3, –8).

Předpokládejme, že bod *B* má souřadnice $B[x_B, y_B]$. Dosaďme opět do vzorce pro výpočet souřadnic vektoru:

$$3 = x_B - 1 \qquad -8 = y_B - 7$$

$$x_B = 4 \qquad y_B = -1$$

Souřadnice bodu *B* jsou *B*[4, –1].

Cvičení 7.

Orientovaná úsečka *CD* je umístěním vektoru **v**. Určete souřadnice počátečního bodu *C*, je-li dáno *D*[10, 3, 6] **v** = (8, 3, 9).

Předpokládejme, že bod *C* má souřadnice $C[x_C, y_C]$. Dosaďme opět do vzorce pro výpočet souřadnic vektoru:

$$8 = 10 - x_C \qquad 3 = 3 - y_C \qquad 9 = 6 - z_C$$

$$x_C = 2 \qquad y_C = 0 \qquad z_C = -3$$

Souřadnice bodu *C* jsou *C*[2, 0, –3].

Příklad 1.

Znázorněte pravidelný šestiboký hranol *ABCDEFA'B'C'D'E'F'*. Vyhledejte na něm všechny orientované úsečky určené uspořádanými dvojicemi vrcholů hranolu, které jsou dalšími umístěními vektoru

a) **a** = *BC* b) **b** = *AC*

Příklad 2.

V rovině jsou dány bod A, B. Vypočítejte vektor $\mathbf{v} = AB$, je-li dáno:

a) $A[-1, -6]$, $B[2, -5]$

b) $A\left[\frac{3}{2}, -\frac{5}{6}\right], B\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right]$

c) $A[-2, -3, -2]$, $B[1, -2, -4]$

d) $A\left[\frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, -\frac{3}{8}\right], B\left[\frac{9}{10}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\right]$

Příklad 3.

Zjistěte, zda orientovaná úsečka AB je umístěním vektoru $\mathbf{u} = (5, -3)$, je-li dáno

a) $A[1, -1]$, $B[4, -2]$

b) $A[-8, -2]$, $B[-3,1]$

c) $A[-6, 5]$, $B[-1, 2]$

Příklad 4.

Zjistěte, zda orientovaná úsečka CD je umístěním vektoru $\mathbf{v} = (3, 1, -4)$, je-li dáno
a) $C[-7, -1, 5]$, $D[-4, 2, 1]$
b) $C[-3, -2, -2]$, $D[0, -1, 2]$
c) $C[-4, -1, 2]$, $D[-1, 0, -2]$

Příklad 5.

Orientovaná úsečka AB je umístěním vektoru $\mathbf{u}$. Určete souřadnice koncového bodu B, je-li dáno
a) $A[-5, 2]$, $\mathbf{u} = (-1, 3)$
b) $A[-6, 11]$, $\mathbf{u} = (6, 9)$
c) $A[-7, -4]$, $\mathbf{u} = (-3, -5)$

Příklad 6.

Orientovaná úsečka CD je umístěním vektoru **v**. Určete souřadnice počátečního bodu C, je-li dáno

a) $D[5, -2, 1]$, $\mathbf{v} = (7, -3, -1)$

b) $D\left[1\frac{1}{5}, -3\frac{3}{10}, 2\frac{1}{2}\right], \mathbf{v} = \left(2\frac{7}{10}, -3\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

c) $D\left[\frac{2}{5}, \frac{9}{10}, -\frac{3}{2}\right], \mathbf{v} = (0{,}4; -0{,}1; -1)$

Operace s vektory

Rovnost vektorů

Mějme vektory $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$, jejich rovnost označujeme $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ a zavádíme následovně:

$$u_1 = v_1;\ u_2 = v_2;\ u_3 = v_3$$

Součet vektorů (u + v)

Mějme vektory $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$, jejich součet označujeme $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ a zavádíme následovně: zvolíme umístění vektoru $\mathbf{u} = AB$, pak zvolíme umístění vektoru $\mathbf{v} = BC$. Spojíme body A a C a vzniká orientovaná úsečka AC, která je umístěním součtu vektorů **u**, **v**.

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1;\ u_2 + v_2;\ u_3 + v_3)$$

Rozdíl vektorů (u – v)

Mějme vektory **u**, **v**, jejich rozdílem nazýváme součet vektoru **u** s vektorem k **v** opačným, tedy s –**v**. Rozdíl jsme tedy převedli na součet, jehož postup je uveden výše.

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1;\ u_2 - v_2;\ u_3 - v_3)$$

Cvičení 8.

Vypočítejte součty a rozdíly vektorů **u**, **v** je-li dáno $\mathbf{u}=(5,-5)$, $\mathbf{v}=(-1,2)$

Při řešení použijeme vztahy pro sčítání a odčítání:

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(u_1+v_1;u_2+v_2)=(5+(-1);-5+2)=(4;-3)$$

$$\mathbf{v}+\mathbf{u}=(v_1+u_1;v_2+u_2)=(-1+5;2+(-5))=(4;-3)$$

$$\mathbf{u}-\mathbf{v}=(u_1-v_1;u_2-v_2)=(5-(-1);-5-2)=(6;-7)$$

$$\mathbf{v}-\mathbf{u}=(v_1-u_1;v_2-u_2)=(-1-5;2-(-5))=(-6;7)$$

Poznámka

Součet vektorů je komutativní, proto je jedno jestli sčítáme **u** + **v** nebo **v** + **u**. Pozor! Rozdíl komutativní není → je velmi důležité, zda počítáme **u** – **v** nebo **v** – **u**.

Cvičení 9.

Jsou dány vektory $\mathbf{a}=(3,-5,7)$, $\mathbf{b}=(-1,4,-9)$, $\mathbf{c}=(-4,3,2)$. Určete souřadnice vektoru $\mathbf{u}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}$

$$\mathbf{u}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}=(3,-5,7)+(-1,4,-9)-(-4,3,2)=$$

$$=(3+(-1)-(-4);-5+4-3;7+(-9)-2)=(6;-4;-4)$$

Příklad 7.

Vypočítejte součty a rozdíly vektorů **u**, **v** je-li dáno:

a) $\mathbf{u}=(6,-5)$, $\mathbf{v}=(4,3)$

b) $\mathbf{u}=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right)$, $\mathbf{v}=\left(-\frac{3}{2},\frac{7}{10}\right)$

c) $\mathbf{u}=(7,-3,4)$, $\mathbf{v}=(3,-2,-5)$

d) $\mathbf{u}=\left(\frac{2}{3},-1,-\frac{3}{2}\right)$, $\mathbf{v}=\left(1\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$

Příklad 8.

Jsou dány vektory $\mathbf{a} = (3, -5, 7), \mathbf{b} = (-1, 4, -9), \mathbf{c} = (-4, 3, 2)$. Určete souřadnice vektoru:

a) $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$
b) $\mathbf{w} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$

Násobení vektoru číslem (*k*u)
Mějme libovolné (reálné) číslo k a vektor **u**. Součinem čísla k a vektoru **u** nazýváme vektor, který má stejný směr jako **u**, ale má velikost rovnu $|k|\cdot|\mathbf{u}|$ - je tedy k-krát delší než vektor **u**. Pokud je k záporné, musíme ještě převrátit směr vektoru. Pokud je k nula, pak je výsledný vektor nulový.

$$k \cdot \mathbf{u} = (k \cdot u_1; k \cdot u_2; k \cdot u_3)$$

Vektor opačný
Vektor opačný k vektoru **v** je vektor **–v**. Vznikne tedy vynásobením vektoru **v** číslem –1, což má za následek zachování velikosti, ale změnu směru.
Lineární kombinací vektorů
Lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ nazýváme vektor **v**, který lze vyjádřit pomocí vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ a čísel $k_1, k_2, \dots, k_n$ ve tvaru: $\mathbf{v} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n$.
Vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ se nazývají lineárně závislé (LZ), lze-li jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních. Nejsou-li lineárně závislé, pak se nazývají lineárně nezávislé (LN).

Cvičení 9.

Je dán vektor $\mathbf{u} = (5, -5)$. Vypočítejte souřadnice vektorů

a) $2\mathbf{u}$
b) $\frac{1}{5}\mathbf{u}$

Dosadíme do vzorce pro násobení vektorů číslem.

a) $2\mathbf{u} = 2 \cdot (5, -5) = (2 \cdot 5, 2 \cdot (-5)) = (10, -10)$
b) $\frac{1}{5}\mathbf{u} = \frac{1}{5} \cdot (5, -5) = \left(\frac{1}{5} \cdot 5, \frac{1}{5} \cdot (-5)\right) = (1, -1)$

Cvičení 10.

Určete lineární kombinaci $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$ vektorů $\mathbf{u} = (1, -2, 3), \mathbf{v} = (6, 0, -4), \mathbf{w} = (-3, 2, 1)$, je-li $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$.

Dosadíme do zadaného vztahu a vypočteme naznačené operace.

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w} = -1 \cdot (1, -2, 3) + 2 \cdot (6, 0, -4) + 0 \cdot (-3, 2, 1) = (-1, 2, -3) + (12, 0, -8) + (0, 0, 0) =$$
$$= (-1 + 12 + 0, 2 + 0 + 0, -3 + (-8) + 0) = (11, 2, -11)$$

Cvičení 11.

Zjistěte, zda vektory $\mathbf{u} = (1,3), \mathbf{v} = (3,1)$ jsou rovnoběžné.

Vektory jsou rovnoběžné, jestliže jeden je násobkem druhého, neboli zda $\mathbf{u} = k \cdot \mathbf{v}$.
Do daného vztahu dosadíme:

$$\mathbf{u} = k \cdot \mathbf{v}$$

$$(1,3) = k \cdot (3,1)$$

$$(1,3) = (3k, k)$$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = 3k \Rightarrow k = \dfrac{1}{3} \\ 3 = k \Rightarrow k = 3 \end{array}\right\} \text{ dvě různé hodnoty} \rightarrow \text{ neexistuje } k\text{, tak aby } \mathbf{u} = k \cdot \mathbf{v}$$

Vektory nejsou rovnoběžné.

Cvičení 12.

Určete neznámé souřadnice vektorů $\mathbf{u} = (u_1, 2, -2), \mathbf{v} = (1, v_2, 2)$ tak, aby tyto vektory byly rovnoběžné.

Využijeme postupu předchozího cvičení. Vyjdeme ze vztahu $\mathbf{u} = k \cdot \mathbf{v}$.

$$(u_1, 2, -2) = k \cdot (1, v_2, 2)$$

$$(u_1, 2, -2) = (k, k \cdot v_2, 2k)$$

$$u_1 = k$$

$$2 = k \cdot v_2$$

$$-2 = 2k$$

Z třetí rovnice je zřejmé, že $k = -1$. Po dosazení do prvních dvou rovnic již získáváme požadované souřadnice $u_1 = -1$ a $v_2 = -2$.

Cvičení 13.

Rozhodněte, zda vektor $\mathbf{w} = (0,6,3)$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u} = (2,0,1), \mathbf{v} = (-1,3,2)$.

Podle zadání je zřejmé, že $\mathbf{w} = k \cdot \mathbf{u} + l \cdot \mathbf{v}$, neboli hledáme *k* a *l*, která vyhovují zadanému vztahu. Pokud takové *k* a *l* existují, pak i **w** je vektor, který vznikne jako lineární kombinace vektorů **u** a **v**.

$$\mathbf{w} = k \cdot \mathbf{u} + l \cdot \mathbf{v}$$

$$(0,6,3) = k \cdot (2,0,1) + l \cdot (-1,3,2)$$

$$(0,6,3) = (2k, 0, k) + (-l, 3l, 2l)$$

$$(0,6,3) = (2k - l, 3l, k + 2l)$$

$$0 = 2k - l$$

$$6 = 3l$$

$$3 = k + 2l$$

Z druhé rovnice je zřejmé, že $l = 2$. Dosadíme do první i třetí rovnice a vypočteme *k*.

$$0 = 2k - 2 \Rightarrow k = 1$$

$$3 = k + 4 \Rightarrow k = -1$$

Zjistili jsme různé hodnoty pro *k*. Je tedy zřejmé, že neexistuje řešení pro *k* i *l*. Vektor **w** není lineární kombinací vektorů **u** a **v**.

Příklad 9.

Jsou dány vektory $\mathbf{u} = (3, -5)$, $\mathbf{v} = (-2, 6)$. Vypočítejte souřadnice vektorů

a) $2\mathbf{u}$ b) $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ c) $\mathbf{u} - 4\mathbf{v}$ d) $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ e) $\frac{1}{3}\mathbf{u} + \frac{1}{4}\mathbf{v}$ f) $2(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - 3(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

Příklad 10.

Určete lineární kombinaci $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$ vektorů $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$, $\mathbf{v} = (6, 0, -4)$, $\mathbf{w} = (-3, 2, 1)$, je-li:

a) $a = 2, b = 3, c = -4$

b) $a = 3, b = \frac{1}{3}, c = -\frac{1}{2}$

c) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{4}, c = \frac{1}{3}$

Příklad 11.

Jsou dány vektory $\mathbf{b} = (1, -2, -5)$, $\mathbf{c} = (2, -7, 1)$, $\mathbf{d} = (3, -9, 2)$. Určete souřadnice vektoru **a**, platí-li:

a) $\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c} = 3\mathbf{d}$ b) $2\mathbf{a} + \mathbf{b} = 3\mathbf{c} - \mathbf{d}$

Příklad 12.

Zjistěte, zda vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou rovnoběžné:

a) $\mathbf{u} = (2, -3)$, $\mathbf{v} = (-4, 6)$

b) $\mathbf{u} = (-3, 9)$, $\mathbf{v} = (2, -6)$

c) $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\mathbf{v} = (-0,4; -1,2)$

Příklad 13.

Zjistěte, zda vektory $\mathbf{u},\mathbf{v}$ jsou rovnoběžné:

a) $\mathbf{u}=(1,2,-3),\ \mathbf{v}=(-1,-2,3)$

b) $\mathbf{u}=\left(1,\frac{1}{2},-2\right),\ \mathbf{v}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right)$

c) $\mathbf{u}=(3,-4,6),\ \mathbf{v}=(0,0,0)$

Příklad 14.

Určete neznámé souřadnice vektorů $\mathbf{u},\mathbf{v}$ tak, aby tyto vektory byly rovnoběžné.

a) $\mathbf{u}=(u_1,2,6),\ \mathbf{v}=(1,v_2,-2)$

b) $\mathbf{u}=(-6,u_2,-9),\ \mathbf{v}=(8,2,v_3)$

Příklad 15.

Rozhodněte, zda vektor $\mathbf{w}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

a) $\mathbf{w} = (2,-1,1), \mathbf{u} = (3,1,3), \mathbf{v} = (1,1,2)$

b) $\mathbf{w} = (2,-3,0), \mathbf{u} = (3,-2,4), \mathbf{v} = (4,5;-3;6)$

c) $\mathbf{w} = (-1,1,2), \mathbf{u} = (1,5,2), \mathbf{v} = (1,2,0)$

Příklad 16.

Určete neznámou souřadnici vektoru **u** tak, aby vektor **u** byl lineární kombinací vektorů **v**, **w**:

a) $\mathbf{u} = (3,u_2,5), \mathbf{v} = (4,-1,0), \mathbf{w} = (3,2,1)$

b) $\mathbf{u} = (u_1,8,2), \mathbf{v} = (1,2,1), \mathbf{w} = (2,12,5)$

Velikost vektoru (|u|)
Velikost vektoru **u** je dána vzorcem

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Skalární součin vektorů (u · v)
Skalární součin vektorů **u**, **v** označujeme **u · v** a platí:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \varphi,$$

kde φ je úhel mezi vektory **u**, **v**. Pokud je skalární součin dvou vektorů v rovině nulový, pak jsou na sebe tyto vektory kolmé.

Cvičení 14.

Vypočítejte skalární součin **u·v**, je-li dáno: $|\mathbf{u}| = 7, |\mathbf{v}| = 6, \varphi = 60°$.

Dosadíme do vzorce pro výpočet skalárního součinu.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot \cos \varphi = 7 \cdot 6 \cdot \cos 60° = 42 \cdot \frac{1}{2} = 21$$

Cvičení 15.

Vypočítejte skalární součin **u·v**, je-li dáno: $\mathbf{u} = (3, -4), \mathbf{v} = (-2, 1)$.

Dosadíme do vzorce pro výpočet skalárního součinu.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1 = -6 - 4 = -10$$

Cvičení 16.

Zjistěte, zda vektory $\mathbf{u} = (6, 3), \mathbf{v} = (4, -8)$ jsou kolmé.

Vektory jsou kolmé, když jejich skalární součin je roven nule. Spočítejme tedy skalární součin vektorů. Dosadíme do vzorce pro výpočet skalárního součinu.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 6 \cdot 4 + 3 \cdot (-8) = 24 - 24 = 0$$

Skalární součin je roven nule, proto vektory jsou kolmé.

Příklad 17.

Vypočítejte skalární součin **u · v**, je-li dáno:

a) $|\mathbf{u}| = 4, |\mathbf{v}| = 3\sqrt{2}, \varphi = 45°$

b) $|\mathbf{u}| = 4\sqrt{3}, |\mathbf{v}| = 5, \varphi = 150°$.

c) $|\mathbf{u}| = 3,5, |\mathbf{v}| = 5\sqrt{2}, \varphi = 90°$.

Příklad 18.

Vypočítejte skalární součin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, je-li dáno:

a) $\mathbf{u} = (6, 8)$, $\mathbf{v} = (-4, 3)$

b) $\mathbf{u} = (3, -3, 5)$, $\mathbf{v} = (3, -7, -6)$

c) $\mathbf{u} = (4, -2, 0)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 8)$

Příklad 19.

Zjistěte, zda vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou kolmé:

a) $\mathbf{u} = (-1, 3)$, $\mathbf{v} = (-3, 1)$

b) $\mathbf{u} = (7, -3, -9)$, $\mathbf{v} = (-3, 8, -5)$

c) $\mathbf{u} = (2, 17, -4)$, $\mathbf{v} = (6, 0, 3)$

Vektorový součin vektorů $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$
Vektorový součin vektorů **u**, **v** označujeme $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ a platí

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\left(u_2v_3-v_2u_3;u_3v_1-v_3u_1;u_1v_2-v_1u_2\right)$$

Výsledkem vektorového součinu je vektor kolmý k vektorům **u**, **v** a jeho směr určuje pravidlo pravé ruky. Má smysl ho tedy zavádět pouze v třírozměrném prostoru.

Úhel mezi vektory u, v
Úhel mezi vektory **u**, **v** s umístěním *AB*, *AC* je konvexní úhel *BAC* o velikosti $\varphi=\left|\sphericalangle BAC\right|$, kde $\varphi\in\left(0°,180°\right)$. Úhel nedefinujeme, pokud je jeden z vektorů nulový. Úhel mezi vektory **u**, **v** můžeme spočítat ze vzorce

$$\cos\varphi=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{v}|}$$

Cvičení 17.
Určete vektorový součin vektorů $\mathbf{u}=\left(-2,-3,1\right),\mathbf{v}=\left(3,4,-2\right)$.

Dosadíme do vzorce pro vektorový součin.

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\left(u_2v_3-v_2u_3;u_3v_1-v_3u_1;u_1v_2-v_1u_2\right)=\left(\left(-3\right)\cdot\left(-2\right)-4\cdot1;1\cdot9-\left(-2\right)\cdot\left(-2\right);\left(-2\right)\cdot4-3\cdot\left(-3\right)\right)=$$
$$=\left(6-4;3-4;-8+9\right)=\left(2;-1;1\right)$$

Příklad 20.
Určete vektorový součin vektorů $\mathbf{u},\mathbf{v}$, jestliže platí

a) $\mathbf{u}=\left(3,-5,7\right),\mathbf{v}=\left(-1,2,-3\right)$

b) $\mathbf{u}=\left(4,7,-12\right),\mathbf{v}=\left(2,3,-5\right)$

c) $\mathbf{u}=\left(5,-6,8\right),\mathbf{v}=\left(6,-8,9\right)$

Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cirjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčik, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.