INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA

3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

Vzdálenost dvou bodů

Při vyšetřování vzájemné polohy bodů, přímek a rovin lze použít libovolnou vhodně zvolenou soustavu souřadnic (afinní). Avšak při vyšetřování metrických vlastností (délek úseček a velikostí úhlů, speciálně kolmosti přímek a rovin) je nutné použít kartézskou soustavu souřadnic.
Pro analytické vyjádření vzdálenosti $|AB|$ dvou bodů A, B (tj. délky úsečky AB) v kartézské soustavě souřadnic platí věta:
Mějme dánu libovolnou kartézskou soustavu souřadnic na přímce, resp. v rovině, resp. v prostoru. Pak platí:
Vzdálenost $|AB|$ bodů $A[x_A]$, $B[x_B]$ na přímce je dána vzorcem

$$|AB| = |x_B - x_A|.$$

Vzdálenost $|AB|$ bodů $A[x_A, y_A]$, $B[x_B, y_B]$ v rovině je dána vzorcem

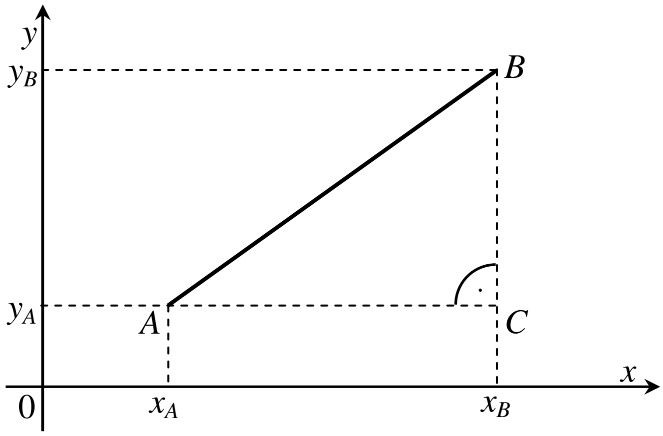
$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Vzdálenost $|AB|$ bodů $A[x_A, y_A, z_A]$, $B[x_B, y_B, z_B]$ na přímce je dána vzorcem

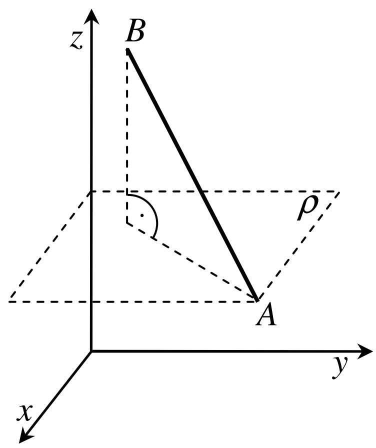
$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Poznámka.

První z těchto vzorců vyplývá z geometrického významu absolutní hodnoty rozdílu reálných čísel. Druhý vzorec plyne pro úsečku AB v obecné poloze z Pythagorovy věty a ve speciálních polohách (když přímka AB je rovnoběžná s osou x, resp. y) plyne z prvního vzorce.



Třetí vzorec plyne pro úsečku AB v obecné poloze opět z Pythagorovy věty, ve speciální poloze (když přímka AB je rovnoběžná s některou ze souřadnicových os, resp. souřadnicových rovin) plyne z prvního, resp. druhého vzorce.



Cvičení 1.

Vypočtěte vzdálenost bodů A, B, je-li dáno:

a) $A[1,-2], B[4,2]$

b) $A[5,-8], B[-7,-3]$

c) $A[-6,-3,2], B[5,-1,-8]$

d) $A[4,-1,-3], B[1,-5,9]$

Dosadíme vždy do vzorce pro vzdálenost:

a) $|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4-1)^2+[2-(-2)]^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

b) $|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-7-5)^2+[-3-(-8)]^2}=\sqrt{(-12)^2+5^2}=$
$=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$

c) $|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{[5-(-6)]^2+[-1-(-3)]^2+(-8-2)^2}=$
$=\sqrt{11^2+2^2+(-10)^2}=\sqrt{121+4+100}=\sqrt{225}=15$

d) $|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}=\sqrt{(1-4)^2+[-5-(-1)]^2+[9-(-3)]^2}=$
$=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+12^2}=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13$

Cvičení 2.

Určete číslo r tak, aby platilo $|AB|=d$:

a) $A[2,r-5], B[4,-3], d=\sqrt{13}$

b) $A[r,-4,5], B[2,r,5], d=3\sqrt{2}$

Opět budeme dosazovat do vzorce pro vzdálenost:

a) $|AB|=d$

$|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4-2)^2+(-3-r+5)^2}=\sqrt{2^2+(2-r)^2}=$
$=\sqrt{4+4-4r+r^2}=\sqrt{8-4r+r^2}$

Nyní položíme výslednou vzdálenost rovnou hodnotě d:

$\sqrt{8-4r+r^2}=\sqrt{13}$

Vyřešíme iracionální rovnici:

$\sqrt{8-4r+r^2}=\sqrt{13}\;\Big|^2$

$8-4r+r^2=13$

$r^2-4r-5=0$

$(r-5)(r+1)=0$

$r_1=5, r_2=-1$

Číslo r má hodnotu 5 nebo –1.

b) $|AB| = d$

$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{(2-r)^2 + (r+4)^2 + 0^2} =$

$= \sqrt{4 - 4r + r^2 + r^2 + 8r + 16} = \sqrt{2r^2 + 4r + 20}$

Nyní položíme výslednou vzdálenost rovnou hodnotě *d*:

$\sqrt{2r^2 + 4r + 20} = 3\sqrt{2}$

Vyřešíme iracionální rovnici:

$\sqrt{2r^2 + 4r + 20} = 3\sqrt{2} \,\Big|^2$

$2r^2 + 4r + 20 = 18$

$r^2 + 2r + 1 = 0$

$(r+1)^2 = 0$

$r = -1$

Číslo *r* má hodnotu –1.

Cvičení 3. (pro pokročilé)

Určete číslo *s* tak, aby vzdálenost $|AB|$ byla nejmenší:

a) $A[5, 3, -2], B[-3, s-1, 4]$

b) $A[4, s+5, -7], B[3, 2, -6]$

a) Nejprve dosadíme do vzorce pro vzdálenost

$|AB| = \sqrt{(-3-5)^2 + (s-1-3)^2 + [4-(-2)]^2}$

První a třetí závorka pod odmocninou je pevně daná. Zaměřme se na druhou závorku. Pokud bude celá závorka (včetně mocniny) nulová, bude vzdálenost nejmenší. (Nakreslete obrázek a případně rozmyslete!)

$(s-4)^2 = 0$

$s = 4$

Pokud *s* bude rovno 4, bude vzdálenost $|AB|$ nejmenší.

b) Nejprve dosadíme do vzorce pro vzdálenost

$|AB| = \sqrt{(3-4)^2 + (2-s-5)^2 + [-6-(-7)]^2}$

První a třetí závorka pod odmocninou je pevně daná. Zaměřme se na druhou závorku. Pokud bude celá závorka (včetně mocniny) nulová, bude vzdálenost nejmenší.

$(-3-s)^2 = 0$

$s = -3$

Pokud *s* bude rovno –3, bude vzdálenost $|AB|$ nejmenší.

Příklad 1.

Vypočtěte vzdálenost bodů A, B, je-li dáno:

a) $A[0,-1], B[-1,3]$

b) $A\left[-\frac{1}{2},2\right], B[0,1;1,2]$

c) $A[-3,2,5], B[6,-1,5]$

d) $A\left[\frac{1}{2},-1,3\right], B[2,1,-3]$

Příklad 2.

Určete číslo r tak, aby platilo $|AB| = d$:

a) $A[-1,1,r], B[-4,r,0], d=\sqrt{22}$

b) $A[2r-2,2,1], B[2,r+5,-1], d=2\sqrt{26}$

c) $A[r+1,-4,-3], B[2,r-3,-1], d=2\sqrt{6}$

d) $A[r+1,r-2], B[2,-3], d=2$

Příklad 3. (pro pokročilé)

Určete číslo s tak, aby vzdálenost $|AB|$ byla nejmenší:

a) $A[s,-1,3], B[1,s-2,-5]$

b) $A[s-1,7,1], B[1,s+3,-1]$

Příklad 4.

Na ose x určete bod tak, aby jeho vzdálenost od bodu $A[-2, 8]$ byla 10.

Příklad 5.

Vypočítejte délky stran trojúhelníku ABC a rozhodněte, zda je pravoúhlý, je-li dáno:

a) $A[2,3], B[5,4], C[5,-1]$

b) $A[3,1], B[4,-1], C[5,2]$

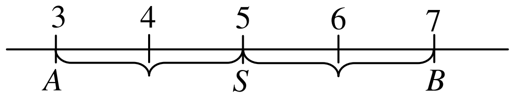
c) $A[1,2,-3], B[4,-2,-3], C[1,3,-5]$

d) $A[0,1,-3], B[-2,-1,3], C[-2,-1,-3]$

Střed úsečky

Cvičení 4.

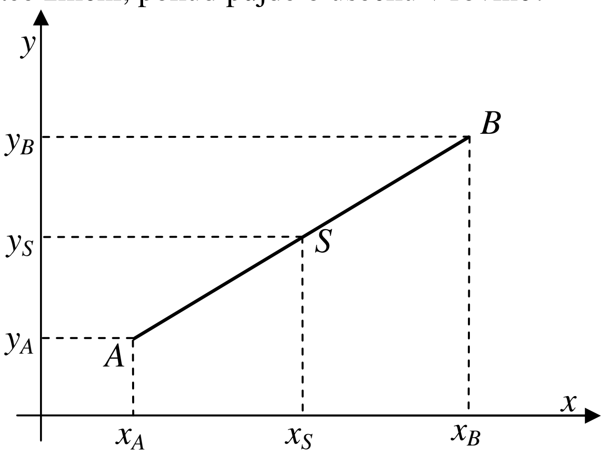
Na číselné ose máme dva body $A[7]$ a $B[3]$. Kde se na ose nachází střed úsečky AB?



Pokud má být uprostřed, musí ležet na čísle 5, tedy $S[5]$.
Jakým matematickým postupem k této hodnotě dojdeme?

Je to průměr z hodnot pro oba krajní body $\dfrac{7+3}{2}=5$

Podívejme se, jak se situace změní, pokud půjde o úsečku v rovině?



Situace na obou souřadných osách je stejná jako předtím.
Pro střed $S[x_S, y_S]$ úsečky AB, kde $A[x_A, y_A]$, $B[x_B, y_B]$ platí:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_S = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Pro výpočet souřadnic středu úsečky v prostoru sestavíme analogickou větu.
Pro střed $S[x_S, y_S, z_S]$ úsečky AB, kde $A[x_A, y_A, z_A]$, $B[x_B, y_B, z_B]$ platí:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_S = \frac{y_A + y_B}{2},\ z_S = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Cvičení 5.

Vypočítejte souřadnice středu S úsečky AB, jestliže platí:

a) $A[-4,3], B[0,-1]$

b) $A[3,-4,-1], B[-3,8,-5]$

Výpočet středu provedeme dosazením do vzorce.
a)

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$x_S = \frac{-4+0}{2} = -2 \qquad y_S = \frac{3+(-1)}{2} = 1$$

Souřadnice středu jsou $S[-2, 1]$.

b)

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_S = \frac{y_A + y_B}{2} \qquad z_S = \frac{z_A + z_B}{2}$$

$$x_S = \frac{3+(-3)}{2} = 0 \quad y_S = \frac{-4+8}{2} = 2 \quad z_S = \frac{-1+(-5)}{2} = -3$$

Souřadnice středu jsou *S*[0, 2, –3].

Cvičení 6.

Jsou dány body *A*, *S*. Vypočítejte souřadnice bodu *B* tak, aby bod *S* byl střed úsečky *AB*.

a) $A[4,-5], S[-3,2]$

b) $A[3,-2,7], S[-1,2,3]$

Při řešení opět využijeme vzorce na výpočet souřadnic středu. Předpokládejme, že bod *B* má souřadnice [x_B, y_B] resp. [x_B, y_B, z_B].

a)

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$-3 = \frac{4 + x_B}{2} \qquad 2 = \frac{-5 + y_B}{2}$$

$$x_B = -10 \qquad y_B = 9$$

Souřadnice bodu *B* jsou *B*[–10, 9].

b)

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_S = \frac{y_A + y_B}{2} \qquad z_S = \frac{z_A + z_B}{2}$$

$$-1 = \frac{3 + x_B}{2} \qquad 2 = \frac{-2 + y_B}{2} \qquad 3 = \frac{7 + z_B}{2}$$

$$x_B = -5 \qquad y_B = 6 \qquad z_B = -1$$

Souřadnice bodu *B* jsou *B*[–5, 6, –1].

Příklad 6.

Vypočítejte souřadnice středu *S* úsečky *AB*, jestliže platí:

a) $A\left[-5,\frac{1}{2}\right], B\left[5,\frac{3}{4}\right]$

b) $A\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right], B\left[\sqrt{2},-5\sqrt{3}\right]$

c) $A[0,4;0,25;-0,5], B\left[\frac{1}{5},-\frac{5}{4},-\frac{1}{2}\right]$

d) $A\left[\sqrt{2},\sqrt{2}+\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{6}\right], B\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}-\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

Příklad 7.

Jsou dány body *A*, *S*. Vypočítejte souřadnice bodu *B* tak, aby bod *S* byl střed úsečky *AB*.

a) $A\left[1,-\frac{1}{2}\right], S\left[\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right]$

b) $A\left[-0,7;-0,8;0,05\right], S\left[\frac{1}{4},-\frac{2}{5},-\frac{7}{8}\right]$

Příklad 8.

Určete bod *D* tak, aby obrazec *ABCD* byl rovnoběžník, je-li dáno:

a) $A\left[1,-2\right], B\left[5,1\right], C\left[-3,4\right]$

b) $A\left[2,-3,1\right], B\left[4,0,-3\right], C\left[-2,3,-4\right]$

Příklad 9.

Vypočítejte délku těžnice t_c trojúhelníku ABC, je-li dáno:

a) $A[-5,-3], B[4,-1], C[2,4]$

b) $A[-7,-2,4], B[3,0,-2], C[1,4,8]$

Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cirjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčik, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.