INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA

3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

Metrické vlastnosti v prostoru

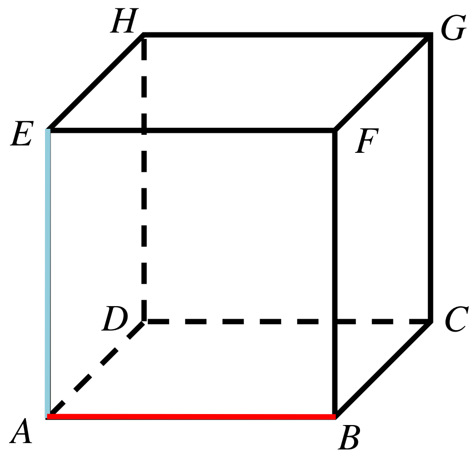
Odchylka přímek *p*, *q* v prostoru

V planimetrii jsme si definovali pojem odchylky dvou přímek *p*, *q* pro různoběžky a pro rovnoběžky. Ve stereometrii rozšíříme pojem odchylky i pro mimoběžky.
Odchylkou mimoběžných přímek *p*, *q* nazýváme odchylku různoběžných přímek p', q' vedených libovolným bodem prostoru tak, že $p' \parallel p$, $q' \parallel q$. Píšeme $\alpha = |\sphericalangle p, q| = |\sphericalangle p', q'|$, přičemž $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, resp. $\alpha \in \left(0°, 90°\right\rangle$.

Cvičení 1.

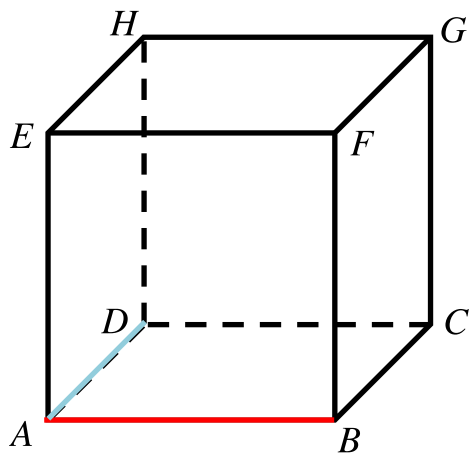
Je dána krychle *ABCDEFGH*. Urči odchylku přímek:
a) *AB*, *AE* b) *AB*, *AD* c) *AE*, *AF* d) *AB*, *BD* e) *CD*, *GH* f) *AD*, *FG* g) *AB*, $S_{AE}F$

a) přímky *AB*, *AE*



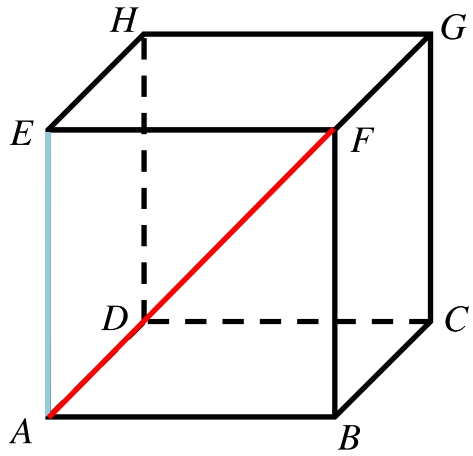
Přímky *AB* a *AE* jsou vedlejší hrany. Krychli tvoří samé čtverce a boční strany čtverce jsou na sebe kolmé. Proto i přímky *AB* a *AE* jsou na sebe kolmé ($AB \perp AE$).

b) přímky *AB*, *AD*



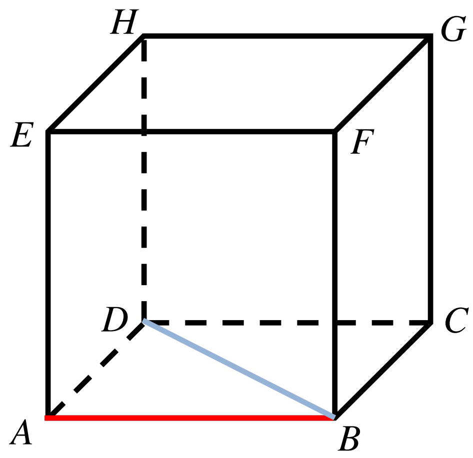
Přímky *AB* a *AD* jsou vedlejší hrany. Krychli tvoří samé čtverce a boční strany čtverce jsou na sebe kolmé. Proto i přímky *AB* a *AD* jsou na sebe kolmé ($AB \perp AD$).

c) přímky AE, AF



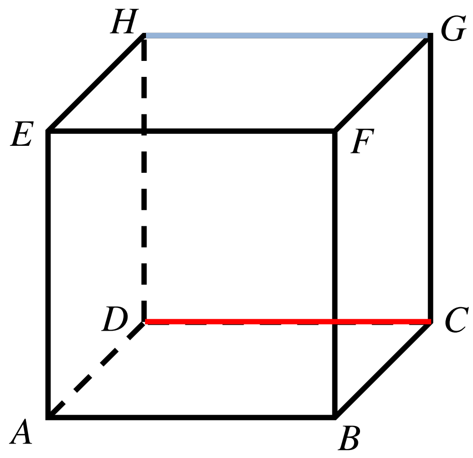
AF je stěnová úhlopříčka přední stěny. Úhlopříčka ve čtverci půlí úhel při vrcholu, proto $|\sphericalangle FAE| = 45°$

d) přímky AB, BD



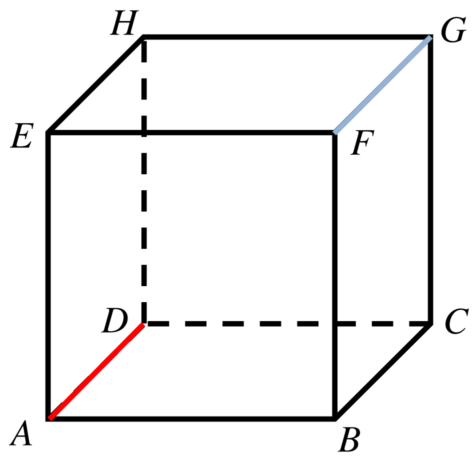
BD je stěnová úhlopříčka dolní podstavy. Úhlopříčka ve čtverci půlí úhel při vrcholu, proto $|\sphericalangle ABD| = 45°$

e) přímky CD, GH



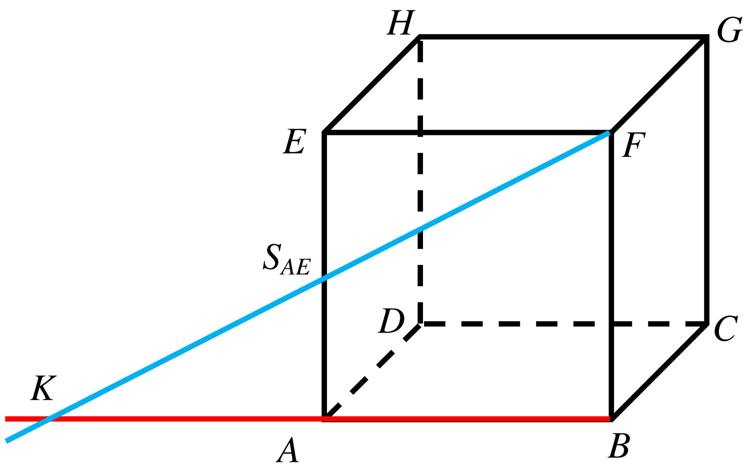
AB a GH jsou protější hrany. Ve čtverci jsou protější strany rovnoběžné, protože čtverec je rovnoběžník. Proto také $AB \parallel GH$.

f) přímky AD, FG



V krychli jsou boční stěny na sebe kolmé. Protější strany jsou rovnoběžné, a proto také $AD \parallel FG$.

g) přímky AB, $S_{AE}F$



Nejdříve spočteme $\sphericalangle EFS_{AE}$:
Protože trojúhelník EFS_{AE} je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu E, použijeme například goniometrickou funkci tangens, protože $|EF| = a$, $|ES_{AE}| = \frac{a}{2}$.

$$\operatorname{tg}|\sphericalangle EFS_{AE}| = \frac{|ES_{AE}|}{|EF|} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \rightarrow |\sphericalangle EFS_{AE}| = 26°33'54''$$

Přímky AB a EF jsou rovnoběžky a přímka FS_{AE} je společná různoběžka. $\sphericalangle EFS_{AE}$ a $\sphericalangle S_{AE}KA$ jsou úhly střídavé, které mají stejnou velikost. Proto přímky AB, $S_{AE}F$ svírají úhel $26°33'54''$

Příklad 1.

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Urči odchylku přímek:
a) *AB*, *HF*
b) *DE*, *BG*
c) *AH*, *BE*

Příklad 2.

Je dána krychle $ABCDEFGH$. Urči odchylku přímek BS_{AE}, $S_{BF}G$.

Příklad 3.

Je dán pravidelný trojboký hranol $ABCA'B'C'$; $|AB| = a = 5$ cm, $|AA'| = v = 3$ cm. Určete odchylku přímek BC a AB'.

Příklad 4.

Je dána krychle *ABCDEFGH*. Urči odchylku přímek AS_{GH}, $S_{AB}E$.

Kolmost přímek

Přímky p, q nazýváme k sobě kolmými (navzájem kolmými) přímkami, právě když pro jejich odchylku platí $|\sphericalangle p,q| = 90°$. Píšeme pak $p \perp q$, popř. $q \perp p$.

Kolmost přímky a roviny

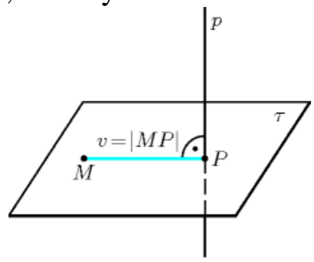
O přímce p a rovině ρ říkáme, že jsou navzájem kolmé (k sobě kolmé), jestliže přímka p je kolmá ke každé přímce roviny ρ. Také říkáme, že přímka p je kolmá (je kolmicí) k rovině ρ nebo že rovina ρ je kolmá k přímce p; píšeme $p \perp \rho$ nebo $\rho \perp p$. Průsečík P přímky $p \perp \rho$ s rovinou ρ se nazývá pata kolmice p.

O kolmosti přímek a rovin platí:

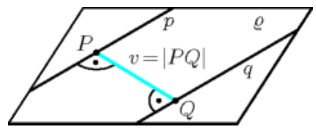
- Je-li přímka p kolmá ke dvěma různoběžným přímkám a, b roviny ρ, pak je kolmá k této rovině.
- Daným bodem lze vést k dané rovině právě jednu kolmici.
- Všechny kolmice k téže rovině jsou navzájem rovnoběžné.
- Daným bodem lze k dané přímce vést právě jednu kolmou rovinu.
- Všechny roviny kolmé k téže přímce jsou navzájem rovnoběžné.

Rovina ρ, která prochází středem dané úsečky AB a je kolmá k přímce AB, se nazývá rovina souměrnosti úsečky AB.

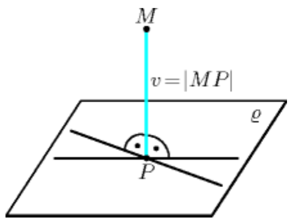
Vzdálenosti bodů, přímek a rovin



Tyto pojmy definujeme pomocí kolmosti přímek a rovin.
Vzdálenost bodu M od přímky p v prostoru lze definovat jako vzdálenost bodu M od bodu P, který je průsečíkem přímky p a k ní kolmé roviny τ vedené bodem M (viz obrázek). Značí se v resp. $v(M, p)$; $v = |MP|$.

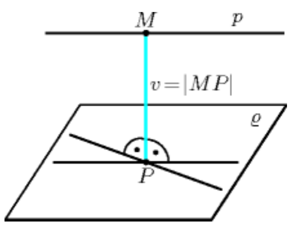


Vzdálenost dvou rovnoběžek p, q v prostoru je rovna jejich vzdálenosti v rovině ρ jimi určené (viz obrázek). Značí se v resp. $v(p,q)$; $v = |PQ|$.

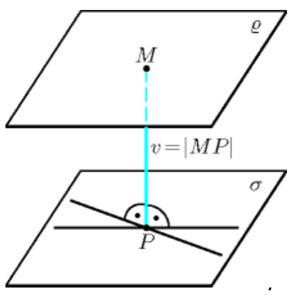


Vzdáleností dvou mimoběžek p, q se rozumí délka úsečky PQ, kde P, Q jsou po řadě průsečíky mimoběžek p, q s takovou příčkou mimoběžek (tj. přímkou, jež obě mimoběžky protíná), která je k oběma z nich kolmá. Značí se opět v resp. $v(p,q)$; $v = |PQ|$.

Vzdáleností bodu M od roviny ρ nazýváme vzdálenost bodu M od paty P kolmice vedené bodem M k rovině ρ (viz obrázek). Značí se v resp. $v(M, \rho)$; $v = |MP|$.



Vzdáleností přímky p od roviny ρ s ní rovnoběžné rozumíme vzdálenost libovolného bodu M přímky p od roviny ρ (viz obrázek). Značí se v resp. $v(p, \rho)$; $v = |MP|$, kde P je pata kolmice vedené bodem M k rovině ρ.



Vzdáleností dvou rovnoběžných rovin ρ, σ rozumíme vzdálenost libovolného bodu jedné roviny od druhé roviny, např. bodu M roviny ρ od roviny σ (viz obrázek).

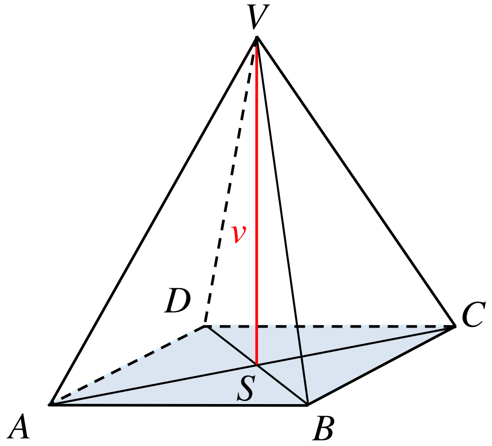
Cvičení 2.

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*, $|AB| = 4$ cm, $|SV| = 5$ cm. Určete:

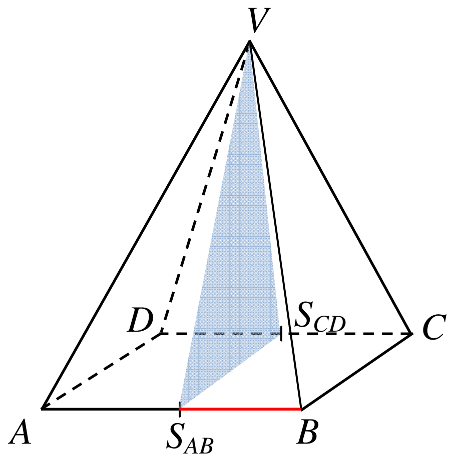
a) vzdálenost bodu *V* od roviny *ABC*
b) vzdálenost bodu *B* od roviny $S_{AB}S_{CD}V$
c) vzdálenost bodu S_{BC} od roviny *ADV*

a) vzdálenost bodu *V* od roviny *ABC*

Z obrázku je vidět, že kolmým průmětem bodu *V* do roviny *ABC* je střed podstavy *S*. Vzdálenost bodu *V* od roviny *ABC* je tedy rovna v = 5 cm.

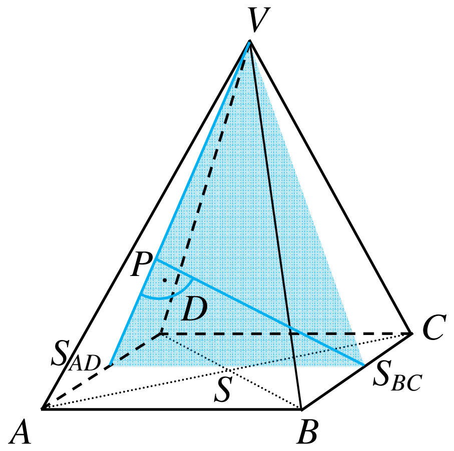


b) vzdálenost bodu *B* od roviny $S_{AB}S_{CD}V$



Přímka *AB* je kolmá k rovině $S_{AB}S_{CD}V$, kolmým průmětem bodu *B* do roviny $S_{AB}S_{CD}V$ je tedy bod S_{AB}. Vzdálenost bodu *B* od roviny $S_{AB}S_{CD}V$ je rovna $\frac{|AB|}{2} = 2$ cm.

c) vzdálenost bodu S_{BC} od roviny ADV



Kolmým průmět bodu S_{BC} (označíme si ho P) do roviny ADV bude určitě ležet v rovině $S_{AD}S_{BC}V$ (je kolmá na rovinu ADV a prochází bodem S_{BC}). Vypočtu délku strany $S_{BC}V$ z pravoúhlého trojúhelníku $S_{BC}VS$.

$$|S_{BC}V|^2 = |SS_{BC}|^2 + |SV|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{a^2 + 4v^2}{4}$$

$$|S_{BC}V| = \sqrt{\frac{a^2 + 4v^2}{4}}$$

$$|S_{BC}V| = \frac{\sqrt{a^2 + 4v^2}}{2}$$

Úsečku PS_{BC} určíme ze vzorce pro obsah trojúhelníka: $S = \frac{av_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2}$.

Jednu dvojici stran tvoří úsečky $S_{AD}S_{BC}$ a SV, druhou úsečky $S_{AD}V$ a PS_{BC}:

$$S = \frac{av_a}{2} = \frac{|S_{AD}S_{BC}| \cdot |SV|}{2} = \frac{|S_{BC}V| \cdot |PS_{BC}|}{2}$$

$$|S_{AD}S_{BC}| \cdot |SV| = |S_{BC}V| \cdot |PS_{BC}|$$

$$|PS_{BC}| = \frac{|S_{AD}S_{BC}| \cdot |SV|}{|S_{BC}V|} = \frac{av}{\frac{\sqrt{a^2 + 4v^2}}{2}} = \frac{2av}{\sqrt{a^2 + 4v^2}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 5}{\sqrt{4^2 + 4 \cdot 5^2}} = 3,71 \text{ cm}$$

Vzdálenost bodu S_{BC} od roviny ADV je 3,71 cm.

Příklad 5.

Je dána krychle *ABCDEFGH; a* = 4 cm. Určete vzdálenost bodu E od roviny AFH.

Příklad 6.

Je dána krychle $ABCDEFGH$, a = 4 cm. Určete vzdálenost bodu rovin:
a) ABC a EFG
b) ABC a EFS_{CG}
c) ADS_{BF} a $S_{AE}FG$
d) AFH a BDG

Příklad 7.

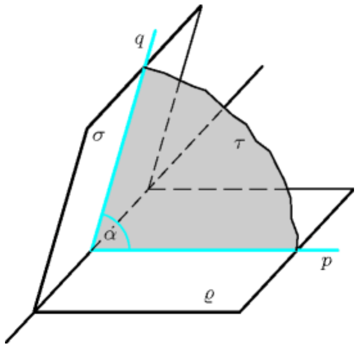
Je dána krychle *ABCDEFGH,* $a = 4$ cm. Určete vzdálenost:
a) přímky *EG* od rovin *ABC*
b) přímky $S_{HD}F$ od roviny ADS_{BF}

Příklad 8.

Je dána krychle *ABCDEFGH,* a = 4 cm. Určete vzdálenost přímek:
a) *AB*, *EF*
b) *BC*, *EH*
c) *BF*, *EH*
d) *EG*, $S_{AB}S_{BC}$
e) *AH*, *BF*

Odchylka dvou rovin

Tento pojem lze definovat pomocí odchylky dvou přímek takto: Odchylka α dvou rovin ρ, σ je rovna odchylce průsečnic p, q těchto rovin s libovolnou rovinou τ kolmou k oběma rovinám ρ, σ (viz. obrázek). Značíme ji $\alpha = |\sphericalangle \rho, \sigma|$. Podle definice je



$$\alpha = |\sphericalangle \rho, \sigma| = |\sphericalangle p, q|; \alpha \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \text{ resp. } \alpha \in \langle 0°, 90° \rangle.$$

Rovnoběžné roviny ρ, σ mají odchylku $\alpha = 0°$.

Příklad 9.

Je dána krychle *ABDCEFGH*. Urči odchylku rovin:

a) *ADF*, *ABC*
b) *DFG*, *ABE*
c) *BDG*, *ABC*

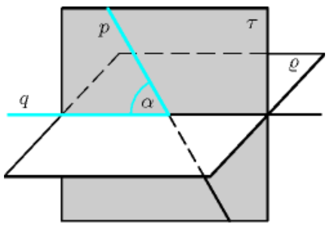
Příklad 10.

Je dán pravidelný čtyřstěn *ABCD*. Urči odchylku stěn *ABC* a *ABD*.

Kolmost dvou rovin

Roviny ρ, σ se nazývají roviny k sobě (navzájem) kolmé, právě když jejich odchylka je $\alpha = |\sphericalangle \rho, \sigma| = 90°$. Také říkáme, že rovina ρ je kolmá k rovině σ nebo že rovina σ je kolmá k rovině ρ, a píšeme $\rho \perp \sigma$ nebo $\sigma \perp \rho$.

Odchylka přímky a roviny



Odchylkou přímky *p* a roviny ρ nazýváme odchylku přímky *p* a přímky *q*, která je průsečnicí roviny ρ s rovinou τ, která prochází přímkou *p* a je kolmá k rovině ρ (viz. obrázek). Značí se $\alpha = |\sphericalangle p, \rho| = |\sphericalangle p, q|$.

Jestliže přímka *p* není kolmá k rovině ρ, potom přímka *q* z definice odchylky přímky a roviny je určena jednoznačně; je to pravoúhlý průmět přímky *p* do roviny ρ. Přitom $\alpha = |\sphericalangle p, \rho| = 0$, právě když $p \parallel \rho$. Jestliže je $p \perp \rho$, pak přímka *q* není sice určena jednoznačně, avšak vždy dostáváme $\alpha = |\sphericalangle p, \rho| = |\sphericalangle p, q| = 90°$.

Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cirjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčik, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
JIHOČESKÝ KRAJ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.