INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA

3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

Sinová věta

V úlohách na trojúhelníky nebudou vždy pouze trojúhelníky pravoúhlé. Proto nebudeme schopni dopočítat všechny zbývající strany a úhly. Budeme muset začít využívat věty, které platí v obecném trojúhelníku. (Samozřejmě i v pravoúhlém.)

Sinová věta:
Pro každý trojúhelník ABC, jehož vnitřní úhly mají velikost α, β, γ a strany délky a, b, c platí:
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

POZOR! Při použití sinové věty je nutno uvážit možnost dvou řešení a rozhodnout na základě trojúhelníkové nerovnosti a věty o součtu vnitřních úhlů v trojúhelníku o počtu řešení.

Cvičení 1. (pro pokročilé)

Proveďte důkaz sinové věty ve tvaru $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$.

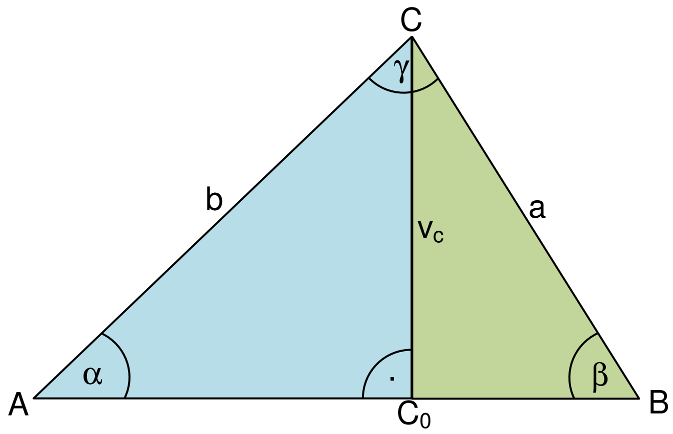
Máme ostroúhlý trojúhelník ABC. Sestrojíme výšku v_c, její patu označíme C_0. Vzniknou dva další trojúhelníky – ACC_0 (modrý) a BCC_0 (zelený) oba pravoúhlé.

V obou trojúhelnících vyjádříme velikost výšky v_c.

Trojúhelník ACC_0: $\sin\alpha=\dfrac{v_c}{b}\Rightarrow v_c=\sin\alpha\cdot b$

Trojúhelník BCC_0: $\sin\beta=\dfrac{v_c}{a}\Rightarrow v_c=\sin\beta\cdot a$

Oba výrazy pro v_c se musejí rovnat:
$v_c=\sin\alpha\cdot b=\sin\beta\cdot a$. Po vydělení výrazem $\sin\alpha\cdot\sin\beta$ získáváme: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}$, což jsme měli dokázat.



Důkaz pro pravoúhlý trojúhelník a tupoúhlý trojúhelník je již obdobný. (Je možné si udělat též jako cvičení.)

Poznámka:

Při formulaci sinové věty se také můžeme zcela obejít bez pojmenovávání stran, úhlů nebo vrcholů. Například sinová věta může být vyslovena takto:
Pro každý trojúhelník platí, že poměr strany a sinu protějšího úhlu je vždy stejný.

Poznámka:

V dalších výpočtech budeme všechny úhly vyjadřovat s přesností na minuty, délky s přesností na dvě desetinná čísla (pokud to bude nutné) a při výpočtech budeme přednostně používat hodnoty (pokud je to možné) ze zadání.

Cvičení 2.

Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: $a = 10$, $\beta = 100°$, $\gamma = 50°$.
Nejdříve určíme úhel α (potřebujeme úhel proti straně *a*).

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - (\beta + \gamma)$$

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - (100° + 50°) = 30°$$

Teď použijeme sinovou větu:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow b = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot a$$

$$b = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \cdot a = \frac{\sin 100°}{\sin 30°} \cdot 10 = 19{,}7$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot a$$

$$c = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot a = \frac{\sin 50°}{\sin 30°} \cdot 10 = 15{,}32$$

V trojúhelníku *ABC* platí: $a = 10$, $b = 19{,}7$, $c = 15{,}32$, $\alpha = 30°$, $\beta = 100°$, $\gamma = 50°$.

Příklad 1.

Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: $b = 51{,}23$, $\alpha = 61°28'$, $\gamma = 8°13'$.

Cvičení 3.

Urči zbývající strany a úhly v trojúhelníku *ABC*, je-li dáno: $a = 6{,}1$, $b = 7{,}2$, $\alpha = 55°$.
Nejdříve určíme úhel β (potřebujeme úhel proti straně *b*).

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha$$

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha = \frac{7{,}2}{6{,}1}\cdot\sin 55° = 0{,}9669$$

Úhly s touto hodnotou sinu existují dva!

$$\beta_1 = 75°13'$$

Dopočítáme úhel γ

$$\alpha+\beta+\lambda = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - (\alpha+\beta)$$

$$\gamma_1 = 180° - (55° + 75°13') = 49°47'$$

Sinovou větou vypočteme c_1:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a$$

$$c_1 = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\alpha}\cdot a = \frac{\sin 49°47'}{\sin 55°}\cdot 6{,}1 = 5{,}69$$

$$\beta_2 = 180° - \beta_1 = 180° - 75°13' = 104°47'$$

Dopočítáme úhel γ

$$\alpha+\beta+\lambda = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - (\alpha+\beta)$$

$$\gamma_2 = 180° - (55° + 104°47') = 20°13'$$

Sinovou větou vypočteme c_2:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\cdot a$$

$$c_2 = \frac{\sin\gamma_2}{\sin\alpha}\cdot a = \frac{\sin 20°13'}{\sin 55°}\cdot 6{,}1 = 2{,}57$$

Příklad má dvě řešení:
1) $a = 6{,}1$, $b = 7{,}2$, $c_1 = 5{,}69$, $\alpha = 55°$, $\beta_1 = 75°13'$ $\gamma_1 = 49°47'$.
2) $a = 6{,}1$, $b = 7{,}2$, $c_2 = 2{,}57$, $\alpha = 55°$, $\beta_2 = 104°47'$ $\gamma_1 = 20°13'$.

Příklad 2.

Řešte trojúhelník *ABC*, je-li dáno (pozn. „řešit trojúhelník“ znamená vypočítat zbývající strany a úhly):
a) $b = 3$ dm, $\beta = 60°$, $\gamma = 72°$
b) $b = 5{,}7$ m, $\alpha = 27°50'$, $\beta = 39{,}5°$
c) $a = 36{,}6$ cm, $b = 25{,}2$ cm, $\alpha = 121°20'$
d) $b = 47$ mm, $c = 52{,}4$ mm, $\gamma = 49°54'$

Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cirjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčik, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
JIHOČESKÝ KRAJ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.