



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

## Výukový materiál pro předmět

### MATEMATIKA

#### 3. ročník

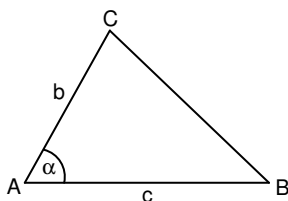
Reg. č. projektu:	CZ.1.07/1.1.10/01.0007
Název projektu:	<b>Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP</b>
Název příjemce:	<b>Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1</b>
Klíčová aktivita:	Využití ICT ve výuce matematiky
Použitá literatura:	Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

## Další trigonometrické věty

Věty uvedené v této kapitole mohou usnadnit výpočty, ale je možné se bez nich obejít (na rozdíl od kosinové a sinové věty).

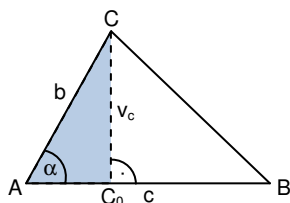
### Cvičení 1a.

Urči obsah trojúhelníku  $ABC$ , jestliže platí  $c = 14$ ;  $b = 10,3$ ;  $\alpha = 60^\circ 57'$ . Nejdříve odvoďte obecný vzorec a pak dosad'te. Nakreslíme náčrtek:



$$\text{Obsah trojúhelníka } S = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Musíme určit výšku  $v_c$ .



Z pravoúhlého trojúhelníka  $ACC_0$ :

$$\sin \alpha = \frac{v_c}{b} \Rightarrow v_c = b \cdot \sin \alpha$$

Dosadíme:

$$S = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

Určíme obsah:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 10,3 \cdot 14 \cdot \sin 60^\circ 57' = 63$$

### Poznámka:

Máme podobné vzorce a stejné výsledky  $\rightarrow$  vzpomeňme na definici funkce sinus  $\rightarrow$

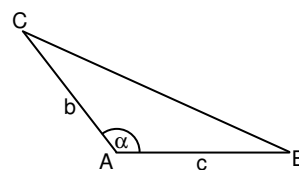
$$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha) \rightarrow \text{proto také } S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} bc \sin(\pi - \alpha).$$

### Poznámka

Vzorec  $S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ac \sin \beta$  umožňuje určit obsah trojúhelníku pomocí dvou stran a úhlu mezi nimi.

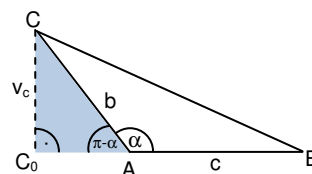
### Cvičení 1b.

Urči obsah trojúhelníku  $ABC$ , jestliže platí  $c = 14$ ;  $b = 10,3$ ;  $\alpha = 119^\circ 3'$ . Nejdříve odvoďte obecný vzorec a pak dosad'te. Nakreslíme náčrtek:



$$\text{Obsah trojúhelníka } S = \frac{c \cdot v_c}{2}.$$

Musíme určit výšku  $v_c$ .



Z pravoúhlého trojúhelníka  $ACC_0$ :

$$\sin(\pi - \alpha) = \frac{v_c}{b} \Rightarrow v_c = b \cdot \sin(\pi - \alpha)$$

Dosadíme:

$$S = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{c \cdot b \cdot \sin(\pi - \alpha)}{2} = \frac{1}{2} bc \sin(\pi - \alpha)$$

Určíme obsah:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot 10,3 \cdot 14 \cdot \sin(180^\circ - 119^\circ 3') = 63$$

## Cvičení 2.

V trojúhelníku  $ABC$  je dáno:  $b = 6,7$ ;  $\beta = 38^\circ$ ;  $\gamma = 73^\circ$ . Určete jeho obsah.

Abychom mohli použít předchozí vzorec, musíme určit dvě strany a úhel mezi nimi. Pomocí sinové věty snadno dopočítáme stranu  $c$ :

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow c = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \cdot b$$

$$c = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \cdot b = \frac{\sin 73^\circ}{\sin 38^\circ} \cdot 6,7 = 10,4$$

Pro vzorec také potřebujeme úhel mezi stranami  $b$  a  $c$ , tedy úhel  $\alpha$ .

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma) = 180^\circ - (38^\circ + 73^\circ) = 69^\circ$$

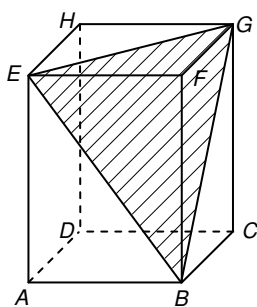
$$\text{Nyní už po dosazení } S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 6,7 \cdot 10,4 \cdot \sin 69^\circ = 32,5$$

Obsah trojúhelníka  $ABC$  je  $32,5 \text{ j}^2$ .

## Cvičení 3.

Je dán kvádr  $ABCDEFGH$  o délkách hran 2, 3, 4. Určete obsah trojúhelníka  $EBG$ .

Nakreslíme si kvádr. (Na označení v tomto případě nezáleží, protože strany trojúhelníka jsou stěnové úhlopříčky všech druhů obdélníků, které se v kvádru vyskytují.)



Pomocí Pythagorovy věty určíme délky jednotlivých stran trojúhelníka  $EBG$ .

Strana  $EB$  (přepona v pravoúhlém trojúhelníku  $ABE$ ):

$$|EB| = \sqrt{|AB|^2 + |AE|^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Strana  $BG$  (přepona v pravoúhlém trojúhelníku  $BCG$ ):

$$|BG| = \sqrt{|BC|^2 + |CG|^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

Strana  $EG$  (přepona v pravoúhlém trojúhelníku  $EGH$ ):

$$|EG| = \sqrt{|GH|^2 + |EH|^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

Pro použití výše uvedeného vzorce na výpočet obsahu musíme znát jeden z úhlů. Pomocí kosinové věty vypočteme například úhel  $\beta$ :

$$\cos \beta = \frac{|BE|^2 + |BG|^2 - |EG|^2}{2 \cdot |BE| \cdot |BG|} = \frac{5^2 + (2\sqrt{5})^2 - \sqrt{13}^2}{2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{5}} = 0,7155$$

$$\beta = 44^\circ 19'$$

Nyní již můžeme dosadit do vzorce pro výpočet obsahu:

$$S = \frac{1}{2} |BE| \cdot |BG| \cdot \sin 44^\circ 19' = 7,8$$

Obsah trojúhelníka  $BEG$  je  $7,8 \text{ j}^2$ .

## Cvičení 4.

V trojúhelníku  $ABC$  známe:  $|AB| = 12$  a  $\gamma = 66^\circ$ . Urči poloměr kružnice trojúhelníku opsané.

Nakreslíme obrázek. Střed kružnice opsané leží na průsečíku os stran.

Poloměr kružnic opsané spočteme z trojúhelníku  $ASS_{AB}$ ,

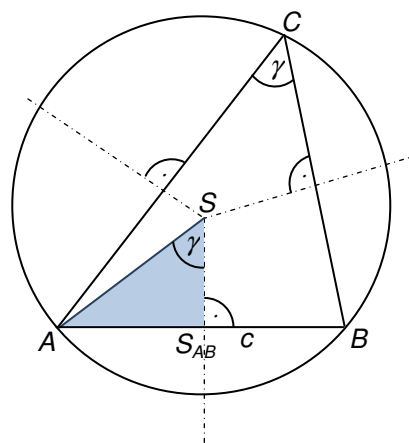
který je pravoúhlý a platí:  $|AS| = r$ ;  $|AS_{AB}| = \frac{c}{2}$ ;

$\sphericalangle ASS_{AB} = \gamma$  (je polovinou  $\sphericalangle ASB$ , který je kvůli větě o obvodovém a středovém úhlu dvojnásobkem úhlu  $\gamma$ ).

$$\text{Platí } \sin \gamma = \frac{|AS_{AB}|}{|AS|} = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r} \Rightarrow r = \frac{c}{2 \sin \gamma}.$$

$$\text{Dosadíme: } r = \frac{c}{2 \sin \gamma} = \frac{12}{2 \cdot \sin 66^\circ} = 6,6$$

Poloměr kružnice opsané je 6,6.



### Poznámka:

Z předchozího příkladu je vidět, že bychom mohli upravit sinovou větu do znění:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

Existují i další vzorce pro výpočty poloměrů:

- poloměr kružnice opsané:  $r = \frac{abc}{4S}$

- poloměr kružnice vepsané:  $\rho = \frac{S}{s}$ , kde  $s = \frac{a+b+c}{2}$

Předchozí vzorce se někdy uvádějí ve tvarech:  $S = \frac{abc}{4r}$ ,  $S = \rho s$  jako vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníka.

### Příklad 1.

Urči obvod trojúhelníku, který je vepsán do kružnice o poloměru 7 cm, jestliže jeho vnitřní úhly mají velikosti:  $\alpha = 67^\circ$ ;  $\beta = 81^\circ$ .

**Příklad 2.**

V rovnoběžníku  $ABCD$  je  $|AC| = 20 \text{ cm}$ ,  $|\sphericalangle CAB| = 40^\circ$ ,  $|\sphericalangle ACB| = 25^\circ$ . Vypočtěte

a) délky stran rovnoběžníku   b) obsah rovnoběžníku

### **Příklad 3.**

Je dán trojúhelník  $ORT$  o stranách  $|OR| = 273 \text{ mm}$ ,  $|RT| = 169 \text{ mm}$ ,  $|TO| = 260 \text{ mm}$ . Vypočtete

- a) velikosti jeho vnitřních úhlů
- b) výšku ke straně  $OR$
- c) těžnici vedenou vrcholem  $T$
- d) poloměr kružnice vepsané
- e) poloměr kružnice opsané

## Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cířjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčík, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.