



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

## Výukový materiál pro předmět

### MATEMATIKA

#### 3. ročník

Reg. č. projektu:	CZ.1.07/1.1.10/01.0007
Název projektu:	<b>Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP</b>
Název příjemce:	<b>Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1</b>
Klíčová aktivita:	Využití ICT ve výuce matematiky
Použitá literatura:	Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

## Kosinová věta

V sinové větě vystupují dvě dvojice strana-protější úhel. Jednu z nich musíme znát, druhou dopočítáme. V případě, že známe dva úhly, můžeme dopočítat i třetí do sinové věty. Bez jedné dvojice strana-protější úhel počítat pomocí sinové věty nemůžeme → všechny prvky trojúhelníku nedokážeme dopočítat, když známe:

a) všechny tři strany a žádný úhel

b) dvě strany a úhel proti třetí straně

Pro řešení úloh neřešitelných pomocí sinové věty existuje věta kosinová.

### Kosinová věta

Pro každý trojúhelník  $ABC$  platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

### Poznámka:

Kosinová věta připomíná větu Pythagorovu. Rozdíl je v posledním členu, který u Pythagorovy věty chybí. Dosadíme do kosinové věty:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - 2ab \cos 90^\circ = a^2 + b^2 - 2ab \cdot 0 = a^2 + b^2$$

Pythagorova věta je speciální případ věty kosinové pro pravoúhlý trojúhelník. → Kosinová věta je zobecněním věty Pythagorovy pro obecný trojúhelník.

### Cvičení 1.

V trojúhelníku  $ABC$  určete zbývající strany a úhly, je-li dáno:  $a = 4,3$ ,  $b = 3,1$ ,  $\gamma = 57^\circ 31'$ .

Určíme stranu  $c$ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$$

$$c = \sqrt{4,3^2 + 3,1^2 - 2 \cdot 4,3 \cdot 3,1 \cos 57^\circ 31'} = 3,71$$

Další úhly bychom mohli určit pomocí kosinové věty, ale jednodušší (kvůli dosazení) bude použití věty sinové, kterou můžeme použít, protože už známe jednu dvojici strana-protější úhel.

Určíme úhel  $\alpha$ :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{a}{c} \sin \gamma$$

$$\sin \alpha = \frac{4,3}{3,71} \sin 57^\circ 31' = 0,9777$$

Úhly s touto hodnotou sinu existují dva!

$$\alpha_1 = 77^\circ 52'$$

Dopočítáme úhel  $\beta$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

$$\beta_1 = 180^\circ - (77^\circ 52' + 57^\circ 31') = 44^\circ 37'$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1 = 180^\circ - 77^\circ 52' = 102^\circ 8'$$

Dopočítáme úhel  $\beta$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

$$\beta_2 = 180^\circ - (102^\circ 8' + 57^\circ 31') = 20^\circ 21'$$

→ nesplňuje sinovou větu → není řešení

V trojúhelníku  $ABC$  platí:  $a = 4,3$ ,  $b = 3,1$ ,  $c = 3,71$ ,  $\alpha = 77^\circ 52'$ ,  $\beta = 44^\circ 37'$ ,  $\gamma = 57^\circ 31'$ .

## Cvičení 2.

Trojúhelník  $ABC$  má délky stran 4, 5, 6. Určete velikosti jeho vnitřních úhlů.

Označíme si strany libovolným způsobem, například  $a = 4$ ,  $b = 5$  a  $c = 6$ . Pomocí kosinové věty můžeme určit libovolný úhel, například úhel  $\alpha$ .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$\alpha = 41^\circ 25'$$

Další úhly určíme pomocí věty sinové, kterou můžeme použít, protože už známe jednu dvojici strana-protější úhel.

Určíme úhel  $\gamma$ :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow \sin \gamma = \frac{c}{a} \sin \alpha$$

$$\sin \gamma = \frac{6}{4} \sin 41^\circ 25'$$

$$\gamma_1 = 82^\circ 49'$$

Dopočítáme úhel  $\beta_1$ :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

$$\beta_1 = 180^\circ - (41^\circ 25' + 82^\circ 49') = 55^\circ 46'$$

$$\gamma_2 = 180^\circ - \gamma_1 = 180^\circ - 82^\circ 49' = 97^\circ 11'$$

Dopočítáme úhel  $\beta_2$ :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$$

$$\beta_2 = 180^\circ - (41^\circ 25' + 97^\circ 11') = 41^\circ 24'$$

- strana  $b$  je větší než strana  $a$  proto i úhel  $\beta$  musí být větší než úhel  $\alpha \rightarrow$  toto není řešení zadaného příkladu

V trojúhelníku  $ABC$  platí:  $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $c = 6$ ,  $\alpha = 41^\circ 25'$ ,  $\beta = 55^\circ 46'$ ,  $\gamma = 82^\circ 49'$ .

## Příklad 1.

Řešte trojúhelník  $ABC$ , je-li dáno:

a)  $a = 6,2$  cm,  $b = 8,4$  cm,  $\gamma = 60^\circ$

b)  $b = 8$  cm,  $c = 6$  cm,  $\alpha = 120^\circ$

c)  $a = 8$  cm,  $b = 10$  cm,  $c = 9$  cm

d)  $a = 18$  cm,  $b = 9,6$  cm,  $c = 8,4$  cm



## Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cířjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčík, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.