INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA

3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

Funkce tangens a kotangens

U definic funkcí tangens a kotangens nebudeme, podobně jako u funkcí $y = \sin(x)$ a $y = \cos(x)$, využívat definici z pravoúhlého trojúhelníka.
Protože máme definovány funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$ pro všechna $x \in R$, budeme funkce tangens a cotangens definovat pomocí nich.

Funkcí tangens se nazývá funkce daná vztahem $y = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Tuto funkci značíme $\mathrm{tg}(x)$.

Obdobně pro funkci kotangens

Funkcí kotangens se nazývá funkce daná vztahem $y = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Tuto funkci značíme $\mathrm{cotg}(x)$.

Cvičení 1.

Určete definiční obor funkce $\mathrm{y} = \mathrm{tg}(x)$ a $\mathrm{y} = \mathrm{cotg}(x)$.
Vyjdeme z definičního vztahu

$$\mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \mathrm{cotg}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Ve vztazích se vyskytují zlomky → nesmíme dělit nulou → jmenovatel musí být různý od nuly.

$$\cos(x) \neq 0 \qquad \sin(x) \neq 0$$

Pokud zohledníme, že funkce $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$ jsou periodické s nejmenší periodou 2π.
Jde o dvě množiny čísel.

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right\} \qquad \bigcup_{k \in Z} \{0 + k \cdot 2\pi\}$$

$$\bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \right\} \qquad \bigcup_{k \in Z} \{\pi + k \cdot 2\pi\}$$

Obě předchozí množiny je možné zapsat úsporněji pomocí jedné množiny.

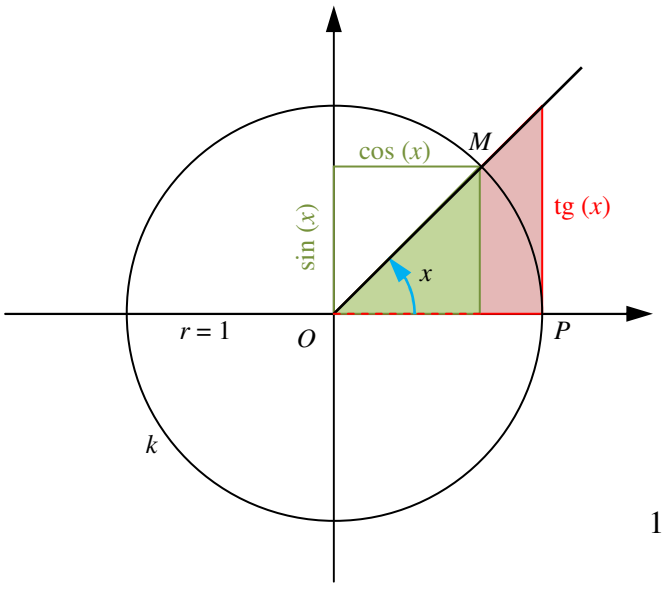
$$\bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \right\} + \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \right\} = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \qquad \bigcup_{k \in Z} \{0 + k \cdot 2\pi\} + \bigcup_{k \in Z} \{\pi + k \cdot 2\pi\} = \bigcup_{k \in Z} \{k\pi\}$$

Jednotlivá vyřazená čísla x jsou od sebe vzdálena o násobky π.
Funkce tangens a kotangens jsou definovány pro všechna čísla

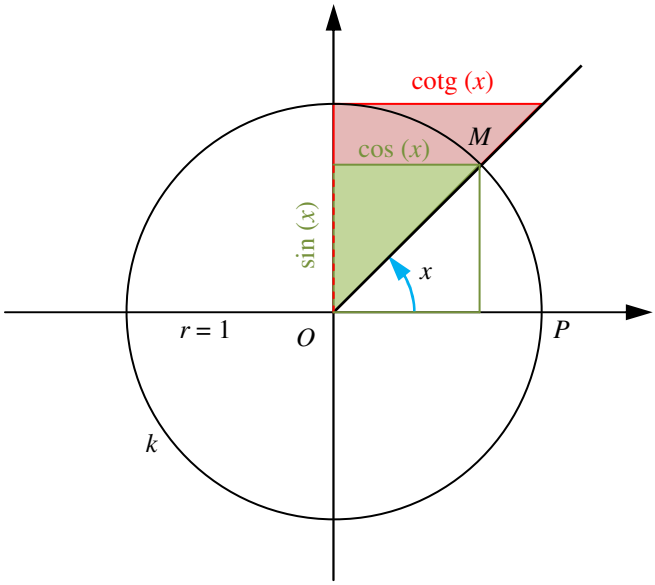
$$R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \qquad R - \bigcup_{k \in Z} \{k\pi\}.$$

Cvičení 2.

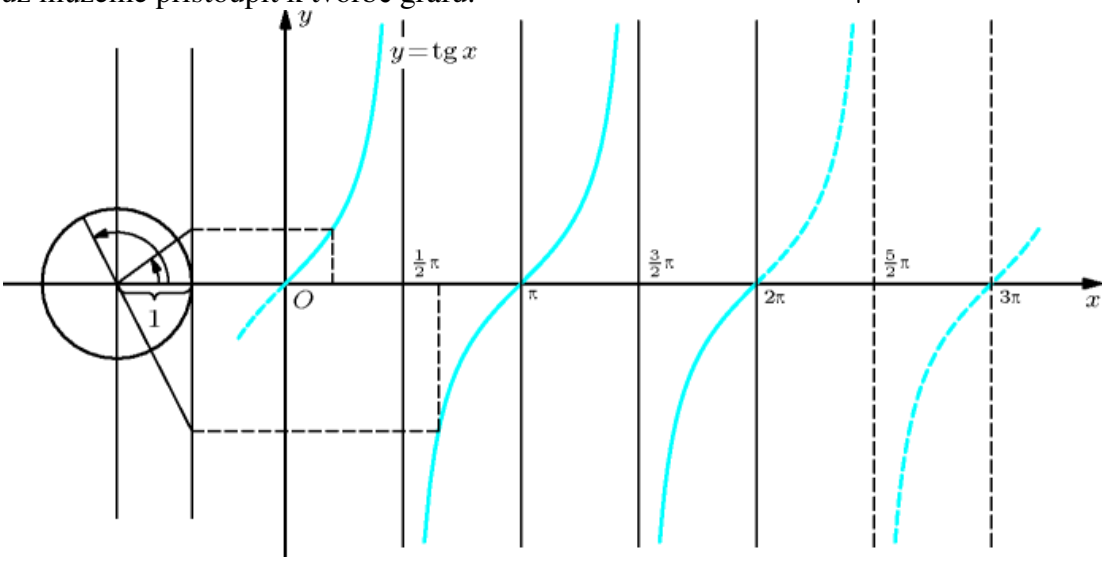
Zobraz hodnoty funkce $\mathrm{y} = \mathrm{tg}(x)$ a $\mathrm{y} = \mathrm{cotg}(x)$ v jednotkové kružnici?
Zelený trojúhelník už známe, červený trojúhelník musí být podobný zelenému a jeho kratší (vodorovná) odvěsna musí mít délku 1 → trojúhelník sestrojíme, když v bodě P sestrojíme svislou přímku a necháme ji protnout s koncovým ramenem úhlu x. Svislá odvěsna má délku $\mathrm{tg}(x)$.



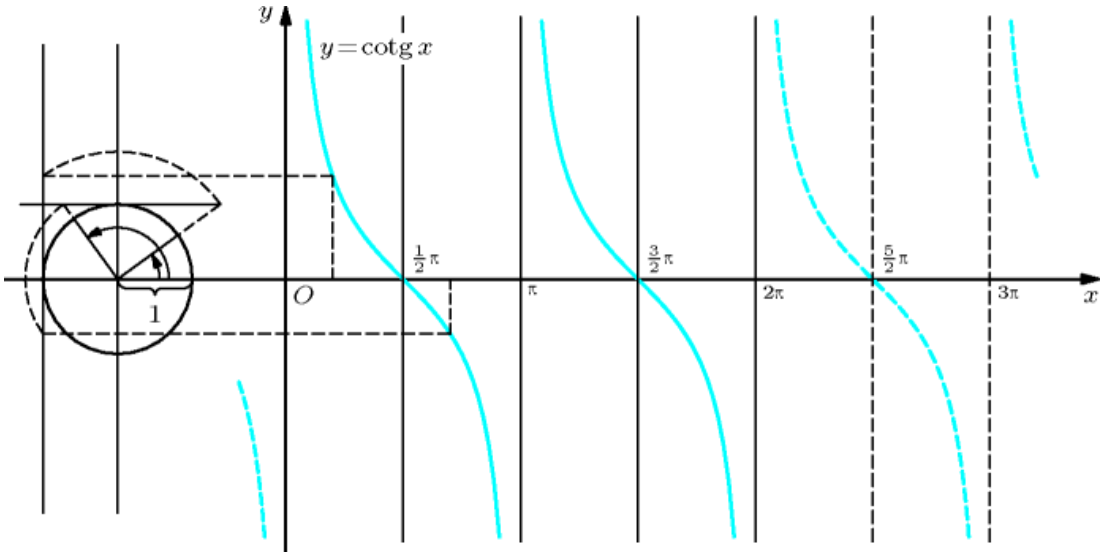
Obdobně pro funkci $\text{cotg}(x)$.
Zelený trojúhelník už známe, červený trojúhelník musí být podobný zelenému a jeho kratší (svislá) odvěsna musí mít délku 1 → trojúhelník sestrojíme, když v bodě [0;1] sestrojíme vodorovnou přímku a necháme ji protnout s koncovým ramenem úhlu *x*. Vodorovná odvěsna má délku $\text{cotg}(x)$.



Nyní už můžeme přistoupit k tvorbě grafu.

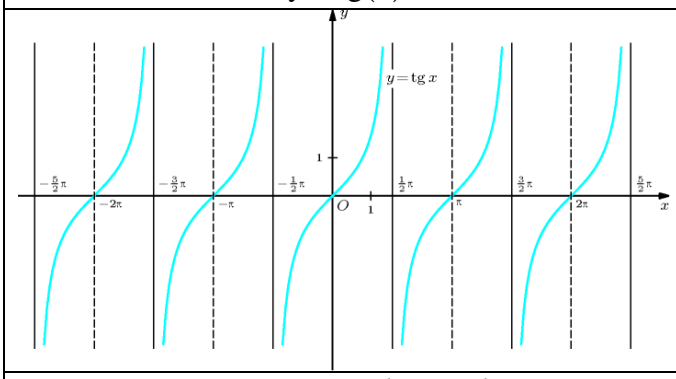
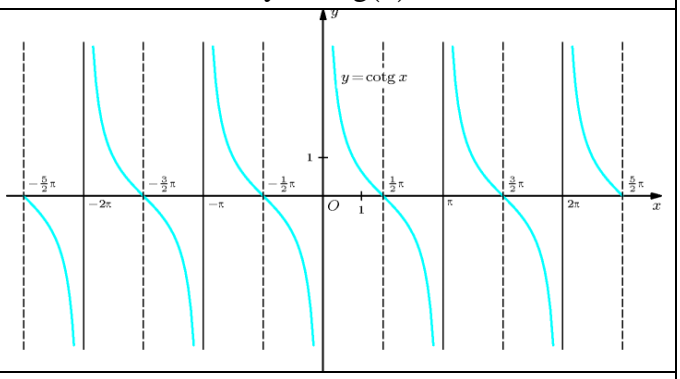


Graf funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic → funkce $y = \text{tg}(x)$ je lichá → musí platit $\text{tg}(x) = -\text{tg}(-x)$.



Graf funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic → funkce $y = \text{cotg}(x)$ je lichá → musí platit $\text{cotg}(x) = -\text{cotg}(-x)$.

Shrňme nyní vlastnosti funkcí

$y = \mathrm{tg}(x)$	$y = \mathrm{cotg}(x)$
	
$D(f) = R - \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$	$D(f) = R - \bigcup_{k \in Z} \{k\pi\}$
periodická s nejmenší periodou π	
$H(f) = R$	
není omezená	
nemá maximum ani minimum	
lichá	
rostoucí v každém intervalu	klesající v každém intervalu

Poznámka:

Znaménka funkcí v jednotlivých kvadrantech.

Kvadranty	I.	II.	III.	IV.
	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$
$\mathrm{tg}(x)$	+	–	+	–
$\mathrm{cotg}(x)$	+	–	+	–

Postřeh:

Příklady s goniometrickými funkcemi $\mathrm{tg}(x)$ a $\mathrm{cotg}(x)$ se řeší obdobě jako příklady s goniometrickými funkcemi $\sin(x)$ a $\cos(x)$.

Příklad 1.

Vyjádřete hodnoty $\mathrm{tg}(x)$ a $\mathrm{cotg}(x)$ pro:

a) $x = 1125°$ b) $x = \frac{19}{4}\pi$ c) $x = 1680°$ d) $x = \frac{11}{3}\pi$

Příklad 2.

Doplňte tabulku:

Úhel [°]	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Úhel [rad]	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\mathrm{tg}(x)$												
$\mathrm{cotg}(x)$												

Příklad 3.

Vyjádřete hodnoty $\mathrm{tg}(x)$ a $\mathrm{cotg}(x)$ pro:

a) $x = -1125°$ b) $x = -\frac{19}{4}\pi$ c) $x = -1680°$ d) $x = -\frac{11}{3}\pi$

Příklad 4.

Najděte všechny úhly $x \in \langle 0; 2\pi)$, pro než platí:

a) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ b) $\operatorname{cotg} x = 0$ c) $\operatorname{cotg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\operatorname{tg} x = -1$

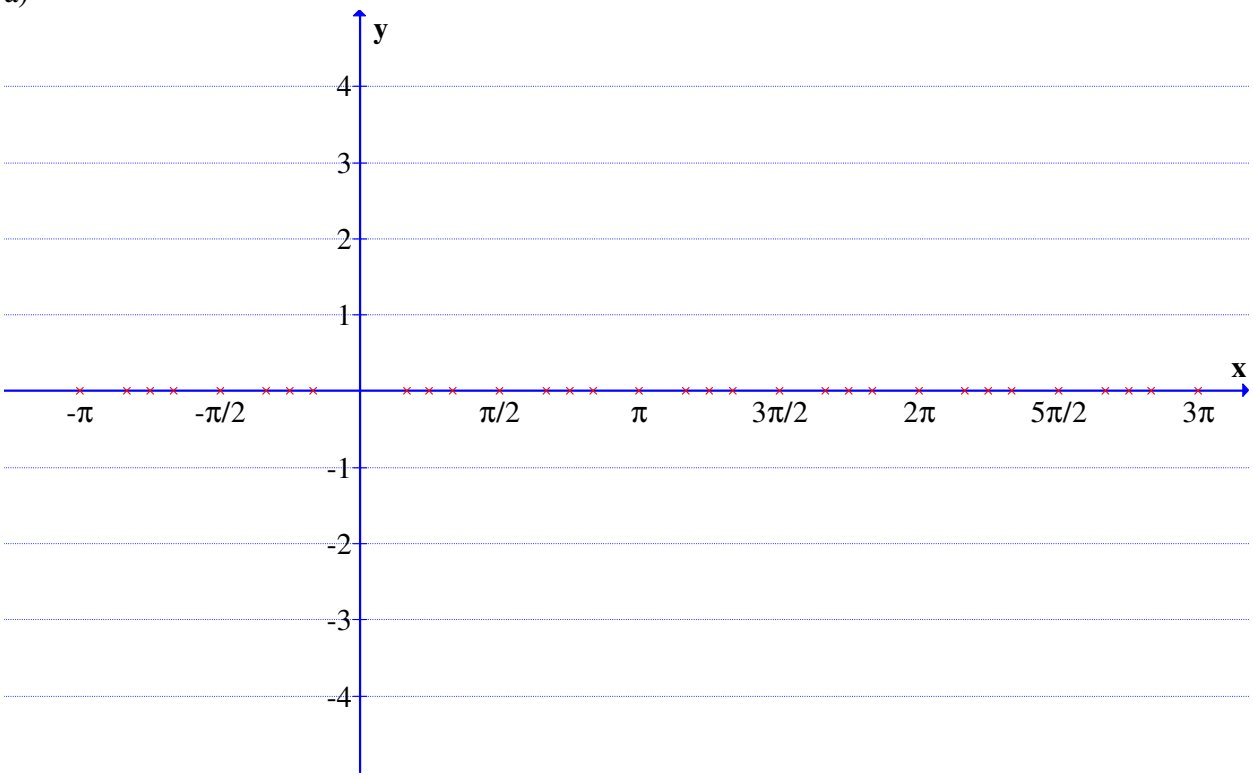
Příklad 5.

Nakreslete graf funkce:

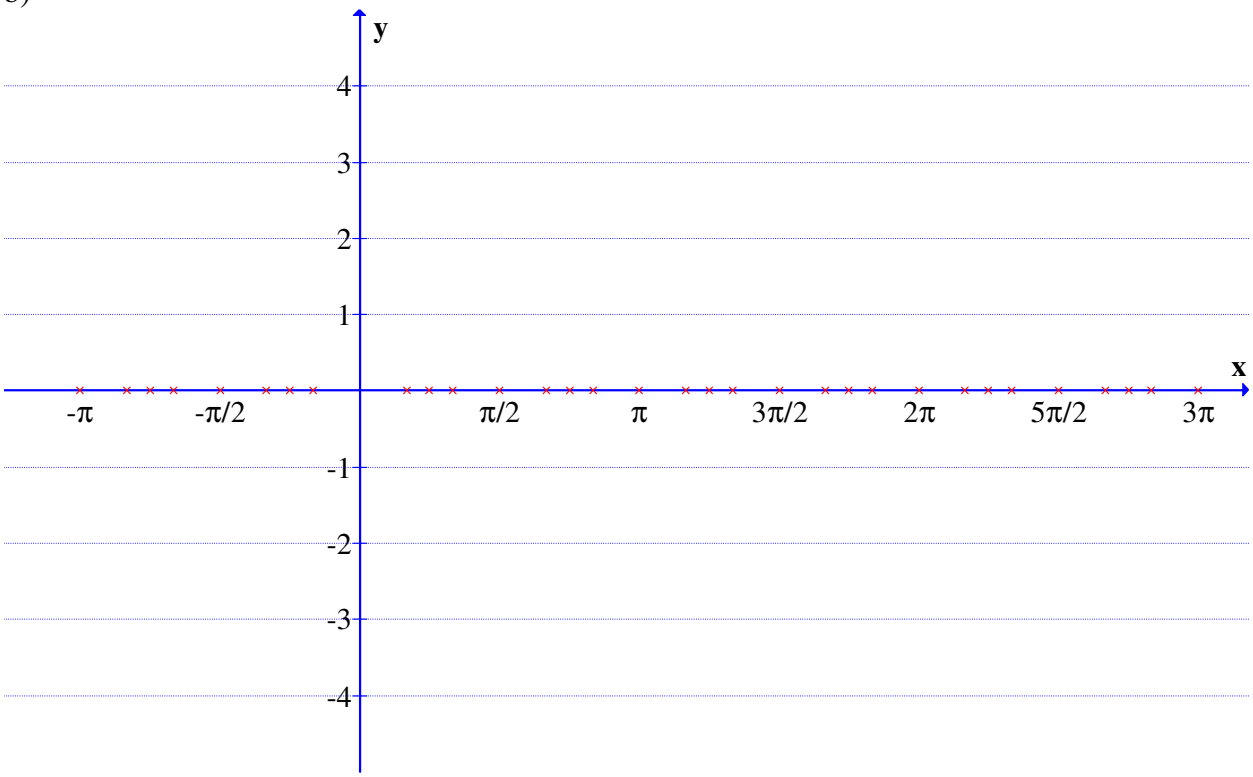
a) $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(x)$ b) $y = 0{,}5\left|\operatorname{cotg}(x)\right|$ c) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$ d) $y = -\operatorname{tg} 2x$

e) $y = \operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ f) $y = \operatorname{tg}(2x - \pi)$ g) $y = \left|\operatorname{tg} x\right| + 2$ h) $y = -\left|\operatorname{cotg} x\right| - 1$

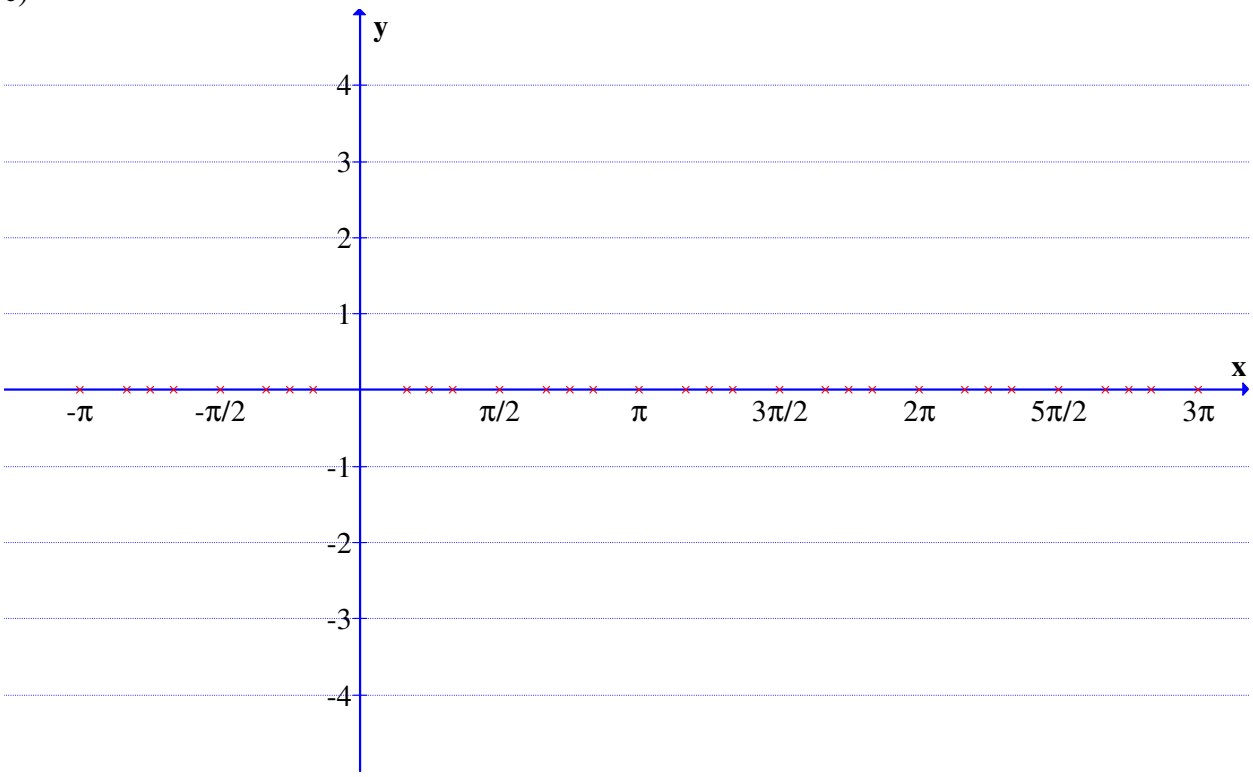
a)



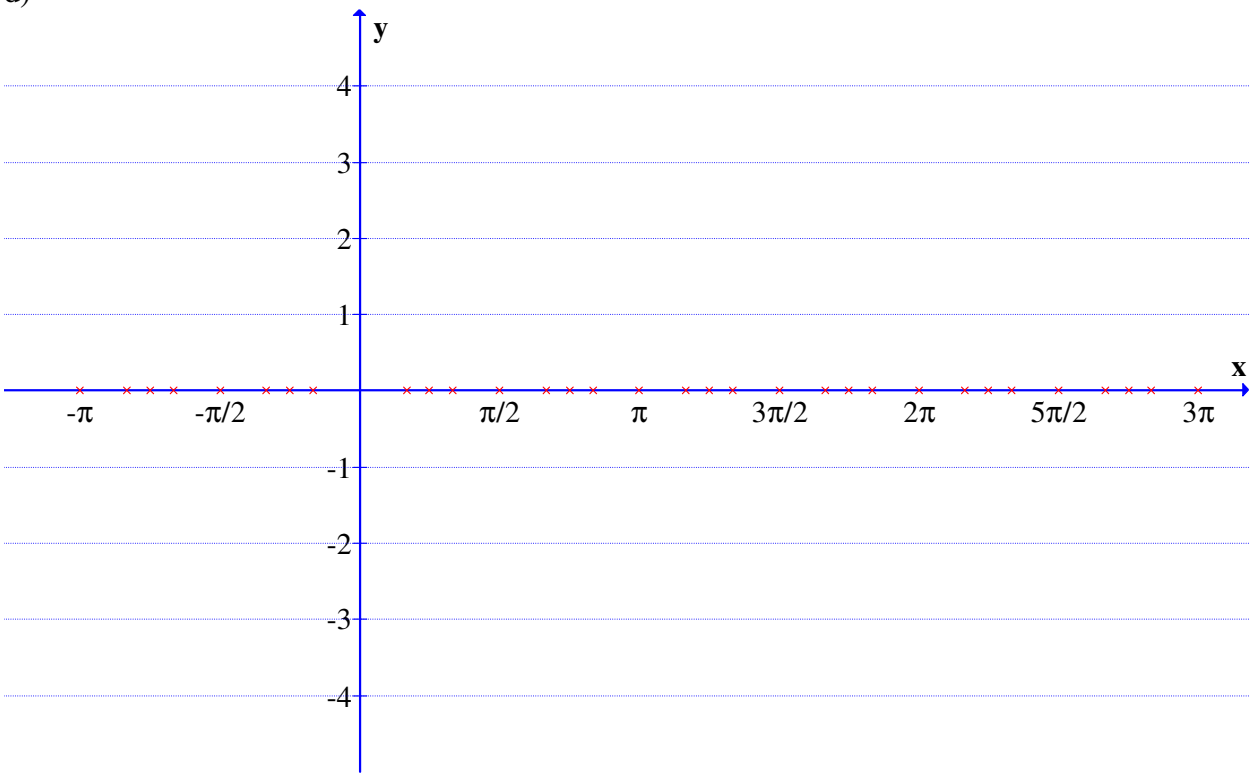
b)


y
4
3
2
1
x
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
-1
-2
-3
-4

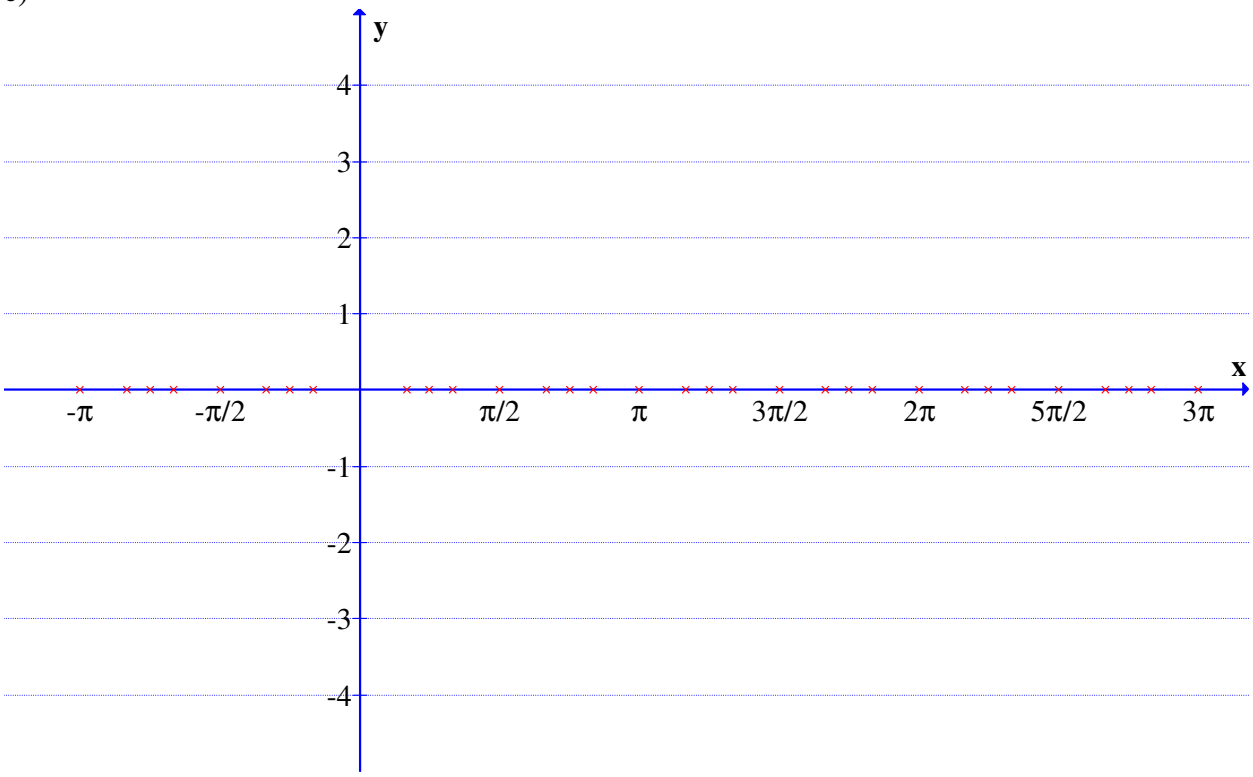
c)


y
4
3
2
1
x
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
-1
-2
-3
-4

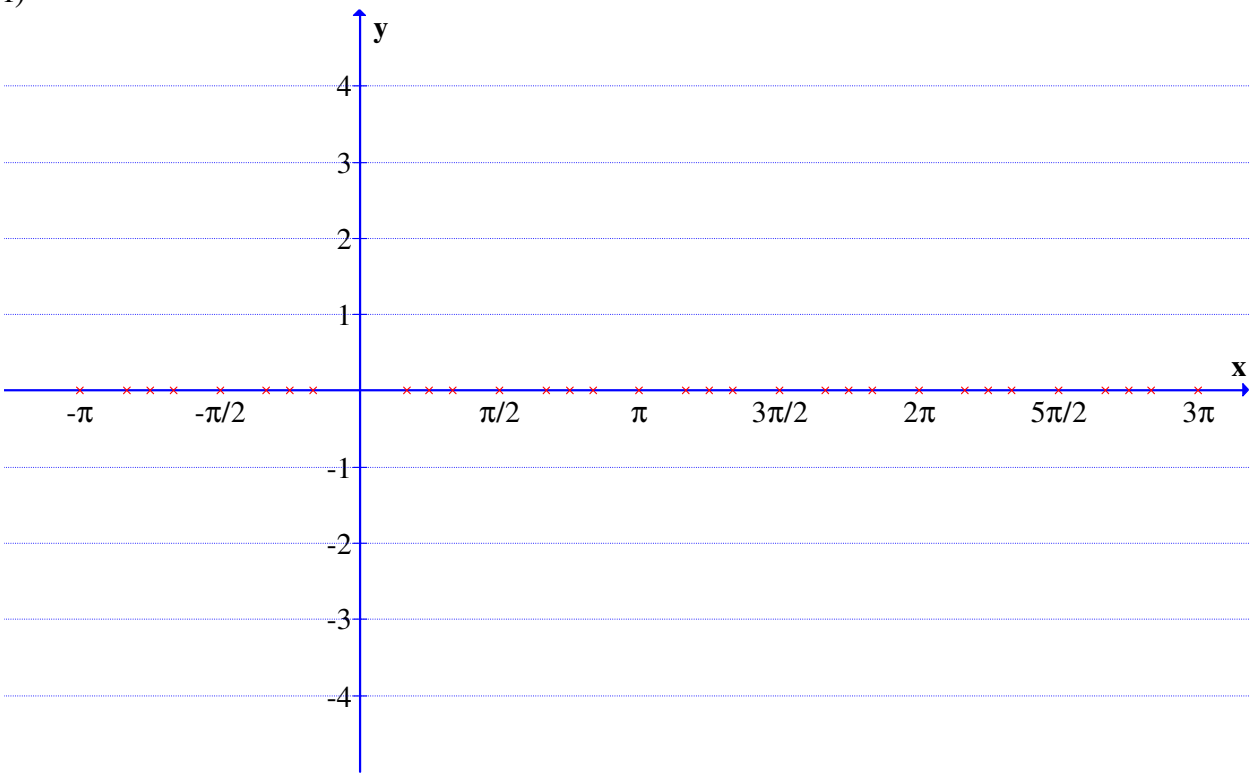
d)


y
4
3
2
1
x
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
-1
-2
-3
-4

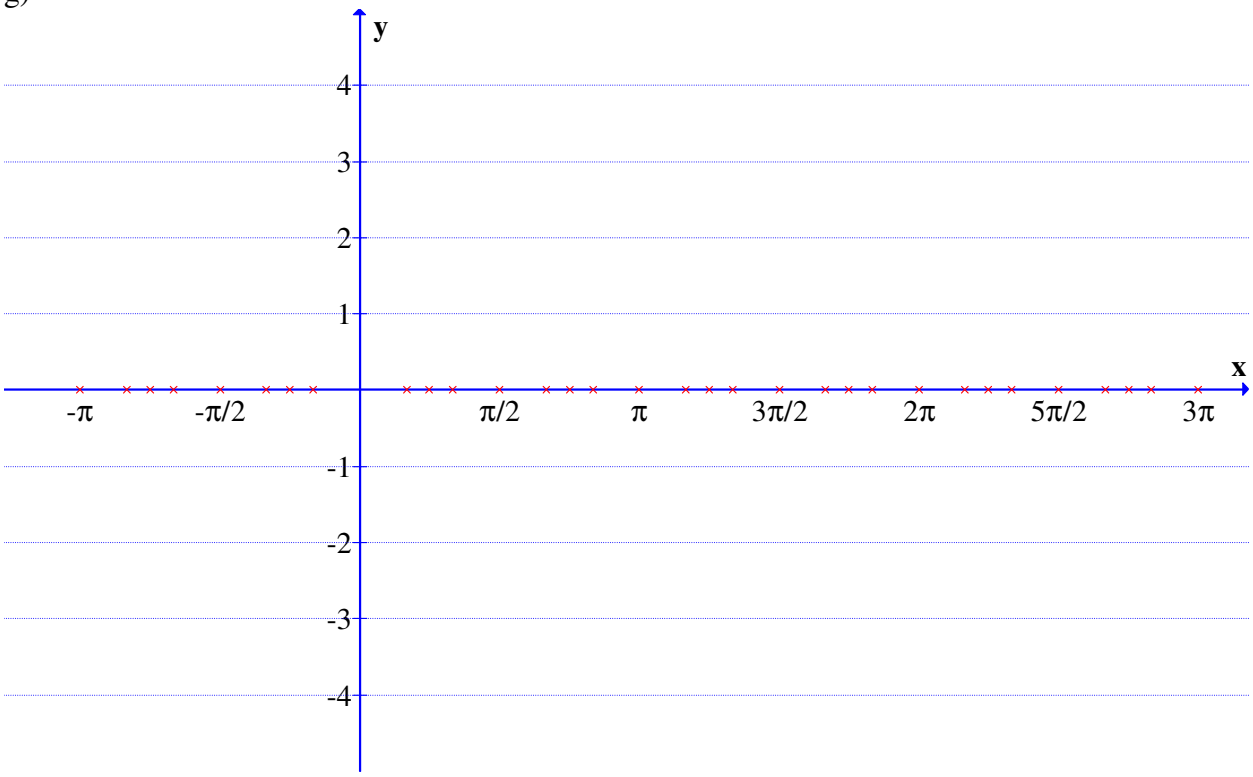
e)


y
4
3
2
1
x
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
-1
-2
-3
-4

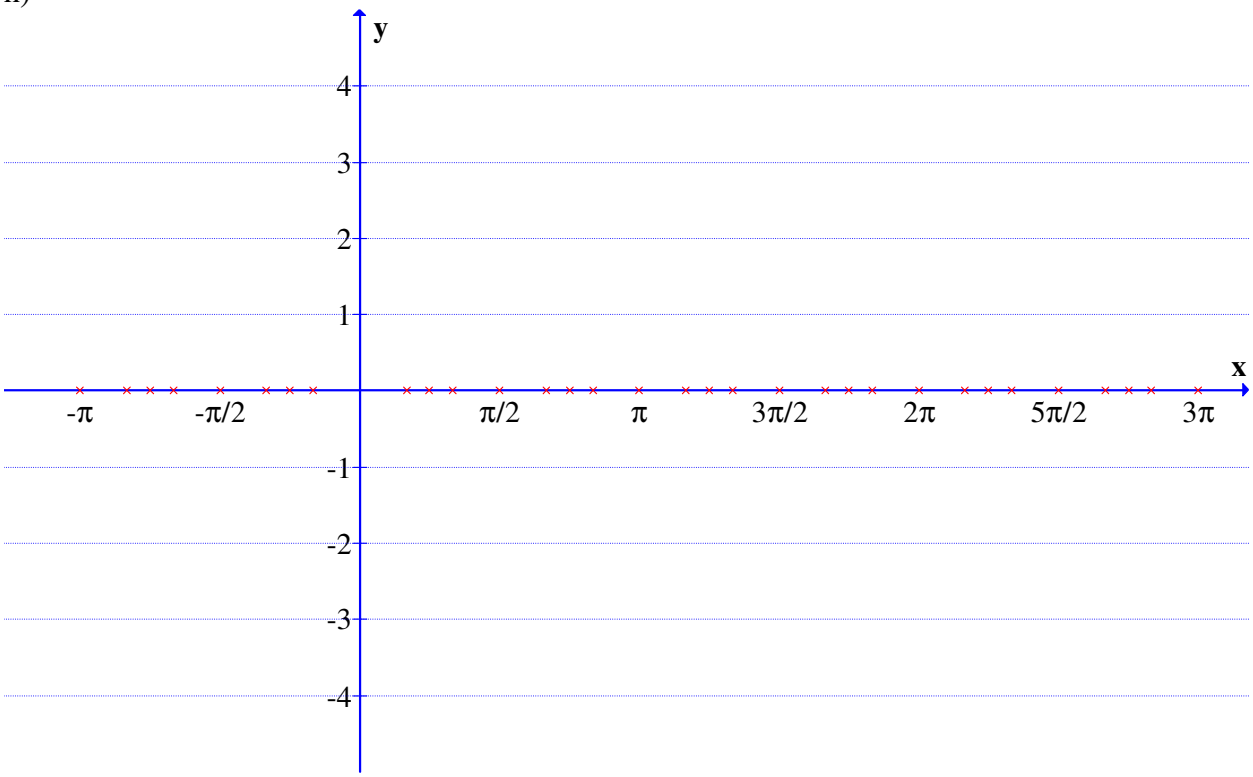
f)


y
4
3
2
1
x
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
-1
-2
-3
-4

g)


y
4
3
2
1
x
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
-1
-2
-3
-4

h)



Cvičení 3.

Vypočtěte $\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{cotg}30°-5\sin 270°+\frac{2}{3}\cos 450°+2\cos\pi$.

$$\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cdot\operatorname{cotg}30°-5\sin 270°+\frac{2}{3}\cos 450°+2\cos\pi=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}-5\cdot(-1)+\frac{2}{3}\cdot 0+2\cdot(-1)=$$

$$=\frac{1}{3}+5+0-2=\frac{10}{3}$$

Příklad 6.

Vypočtěte:

a) $2\operatorname{tg}540°-\sqrt{3}\cdot(-\cos 30°)+\sin^2 60°-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}-\sin\pi$

b) $\sin 30°\cdot\cos 30°-\sqrt{2}\sin 45°+\operatorname{tg}(-60°)-6\cos 720°$

c) $3(\cos 45°)^2-(\sin 60°+\operatorname{tg}30°)^2-2\cos\frac{\pi}{2}+\sin 2\pi$

Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cirjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčik, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
JIHOČESKÝ KRAJ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.