INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA

3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

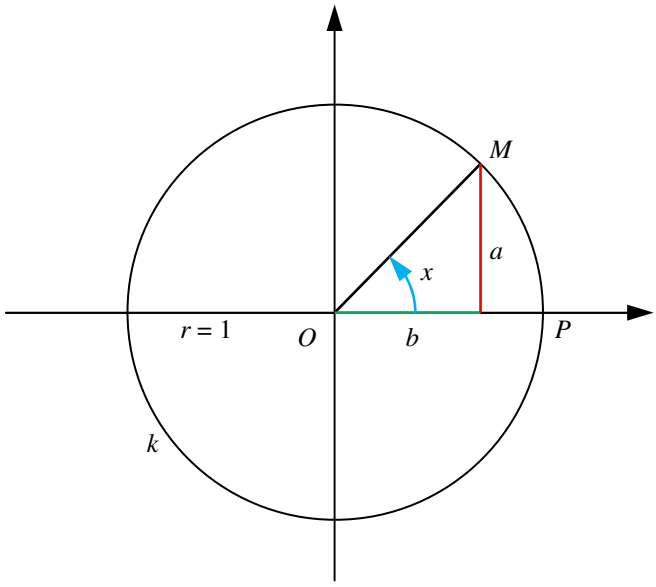
Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

Zavedení funkce sinus a kosinus pro orientovaný úhel

Definici pomocí pravoúhlého trojúhelníku je možné použít pouze pro $x \in (0°, 90°)$ resp. v obloukové míře $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Novou definicí zaručíme stejné hodnoty na těchto intervalech a rozšíříme i na interval větší a zahrneme i praktickou realizaci úhlu, která se periodicky opakuje s periodou 360° resp. 2π.

Pro definici použijeme jednotkovou kružnici (kružnice o poloměru 1 jednotka). Do kružnice nakreslíme úhel o velikosti *x*, s počátečním ramenem *OP* a koncovým *OM*.
Strana *OM* je poloměrem kružnice a proto platí $|OM| = 1$. Vypočteme hodnoty $\sin(x)$ a $\cos(x)$ podle definice z pravoúhlého trojúhelníku:



$$\sin(x) = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{a}{1} = a$$

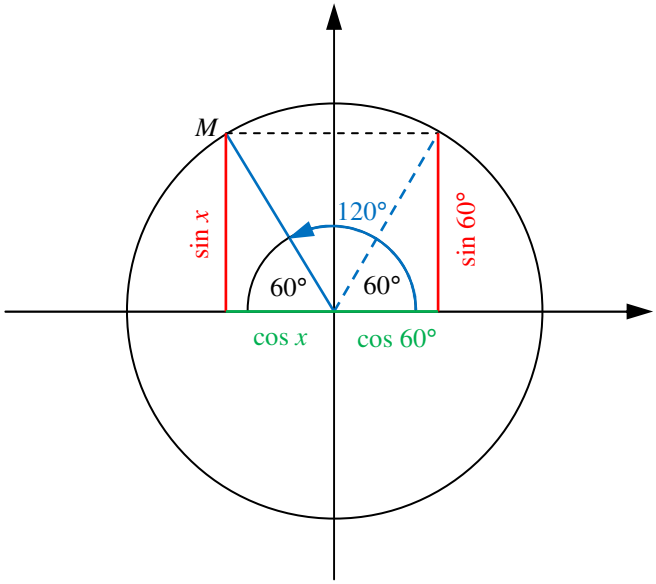
$$\cos(x) = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{b}{1} = b$$

Pokud budeme funkce $\sin(x)$ a $\cos(x)$ interpretovat jako souřadnice bodu *M*[***b***, ***a***], budeme schopni spočítat hodnoty $\sin(x)$ a $\cos(x)$ i pro $x \geq \frac{\pi}{2}$.

Hodnotou funkce $\sin(x)$ rozumíme *y*-vou souřadnici bodu *M* v jednotkové kružnici.
Hodnotou funkce $\cos(x)$ rozumíme *x*-vou souřadnici bodu *M* v jednotkové kružnici.

Cvičení 1.

Vyjádřete hodnoty $\sin(x)$ a $\cos(x)$ pro $x = 120°$.
Nakreslíme si obrázek do jednotkové kružnice a vyznačím $\sin(x)$ a $\cos(x)$:



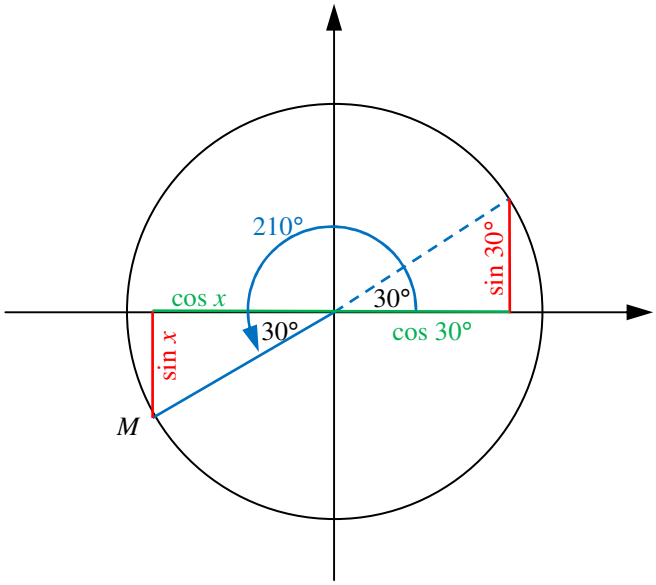
Najdeme v obrázku pravoúhlý trojúhelník se známým úhlem, jehož odvěsny tvoří souřadnice bodu *M*. K tomuto trojúhelníku najdeme podobný trojúhelník s úhlem v pravé horní čtvrtině (v 1. kvadrantu). Vzhledem ke shodnosti obou trojúhelníků platí:

$$\sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$ ($\cos 120°$ je orientován na druhou stranu)

Cvičení 2.

Vyjádřete hodnoty $\sin(x)$ a $\cos(x)$ pro $x = 210°$.
Postupovat budeme podobně jako v předcházejícím cvičení. Nakreslíme si obrázek do jednotkové kružnice a vyznačím $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Najdeme v obrázku pravoúhlý trojúhelník se známým úhlem, jehož odvěsny tvoří souřadnice bodu *M*.
K tomuto trojúhelníku najdeme podobný trojúhelník s úhlem v pravé horní čtvrtině (v 1. kvadrantu).
Vzhledem ke shodnosti obou trojúhelníků platí:



$$\sin 210° = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Poznámka:

Hodnoty funkcí je tedy možné vyjadřovat pomocí hodnoty funkce z intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a to podle následující věty:

Nechť $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, pak platí $f(x) = |f(\pi - x)| = |f(\pi + x)| = |f(2\pi - x)|$, přičemž $(\pi - x)$ je úhel z II. kvadrantu, $(\pi + x)$ z III. kvadrantu, $(2\pi - x)$ ze IV. kvadrantu.

Ve výsledku je třeba zohlednit znaménko funkce v daném kvadrantu.

Kvadranty	I.	II.	III.	IV.
	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$
$\sin(x)$	+	+	–	–
$\cos(x)$	+	–	–	+

Příklad 1.

Vyjádřete hodnoty $\sin(x)$ a $\cos(x)$ pro:

a) $x = 1125°$ b) $x = \frac{19}{4}\pi$ c) $x = 1680°$ d) $x = \frac{11}{3}\pi$

(Nápověda: Najděte nejdříve základní úhel.)

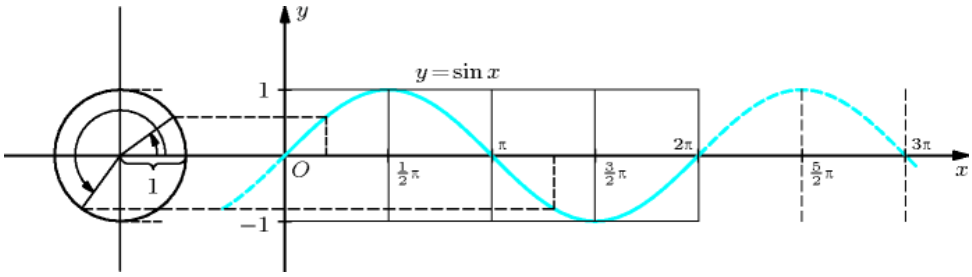
Příklad 2.

Doplňte tabulku:

Úhel [°]	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
Úhel [rad]	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
$\sin(x)$												
$\cos(x)$												

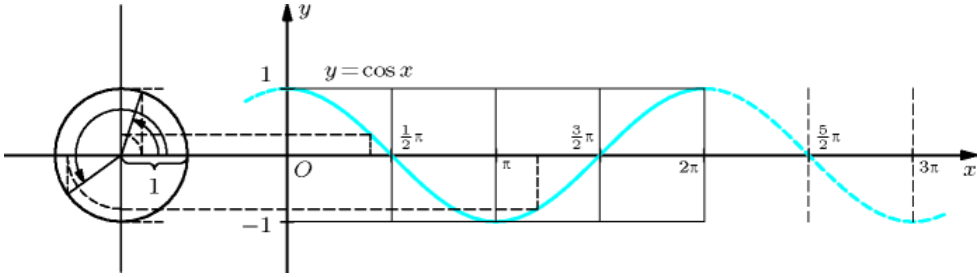
Nyní již můžeme, za použití jednotkové kružnice, sestrojit grafy funkcí.

Grafem funkce $y = \sin(x)$ je hladká křivka zvaná sinusoida.



Graf funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic → funkce $y = \sin(x)$ je lichá → musí platit $\sin(x) = -\sin(-x)$.

Grafem funkce $y = \cos(x)$ je hladká křivka zvaná kosinusoida.

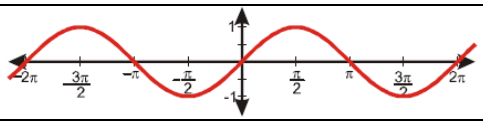
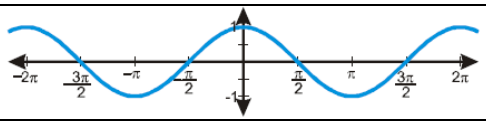


Graf funkce je souměrný podle osy y → funkce $y = \cos(x)$ je sudá → musí platit $\cos(x) = \cos(-x)$.

Poznámka:

Z obrázků je vidět, že obě křivky jsou stejné, jen posunuté o $\frac{1}{2}\pi$.

Shrňme nyní vlastnosti obou funkcí

$y = \sin(x)$	$y = \cos(x)$
	
$D(f) = R$	
periodická s nejmenší periodou 2π	
$H(f) = \langle -1;1 \rangle$	
shora i zdola omezená	
maximum v bodě $\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$	maximum v bodě $0 + k \cdot 2\pi$
minimum v bodě $\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi$	minimum v bodě $\pi + k \cdot 2\pi$
lichá	sudá
rostoucí v $\left(-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right)$	rostoucí v $(\pi + k \cdot 2\pi; 2\pi + k \cdot 2\pi)$
klesající v $\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi; \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi\right)$	klesající v $(0 + k \cdot 2\pi; \pi + k \cdot 2\pi)$

Příklad 3.

Vyjádřete hodnoty $\sin(x)$ a $\cos(x)$ pro:

a) $x=-1125°$ b) $x=-\frac{19}{4}\pi$ c) $x=-1680°$ d) $x=-\frac{11}{3}\pi$

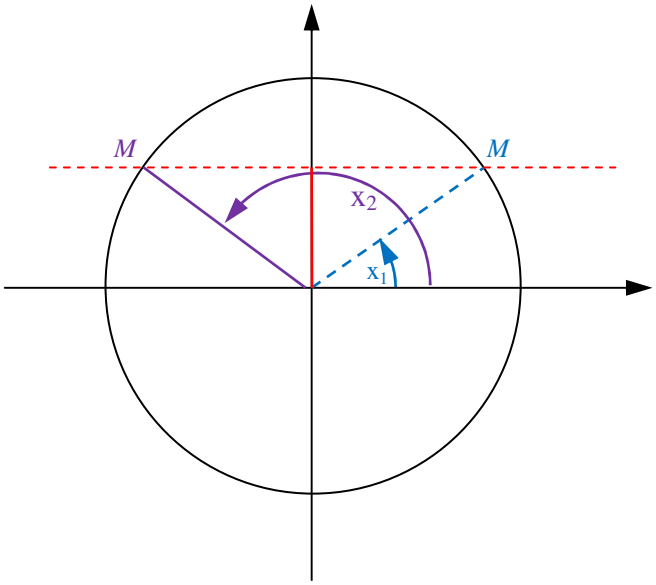
(Nápověda: Využijte sudost a lichost funkcí.)

Cvičení 3.

Najděte všechny úhly $x\in\langle 0;2\pi)$, pro které platí $\sin x=\frac{1}{2}$.

Jde o obrácenou úlohu k dosavadním úlohám. Dosud jsme hledali pro úhly hodnoty goniometrických funkcí, teď hledáme k hodnotám úhly → stačí si pamatovat tabulku goniometrických hodnot a víme, že $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$. Hledané číslo je $x=\frac{\pi}{6}$.

Otázka je, zda neexistují i další řešení? Pomůžeme si jednotkovou kružnicí.



$\sin(x)$ je *y*-ová hodnota souřadnice bodu na kružnici, vyznačím ji na *y*-ové ose. Vyznačím všechny body, jejichž *y*-ová souřadnice je $\frac{1}{2}$ → vodorovnou přímku $y=\frac{1}{2}$. Naše vodorovná přímka se protíná s kružnicí ve dvou bodech → existují dva úhly, pro které platí $\sin x=\frac{1}{2}$

Již víme, že je $x_1=\frac{\pi}{6}$. Z obrázku je vidět, že platí $x_2=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$.

V intervalu $\langle 0;2\pi)$ existují dvě čísla *x*, pro které platí $\sin x=\frac{1}{2}$: $x_1=\frac{\pi}{6}$, $x_2=\frac{5}{6}\pi$.

Poznámka:

Při řešení je možné využít grafu dané funkce a tabulky znamének hodnot funkce. Z tabulky zjistíme, ve kterých intervalech leží daná řešení. $\frac{1}{2} \rightarrow$ kladná hodnota funkce $\sin(x)$ je nebývána v intervalech $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \rightarrow$ úloha má dvě řešení. Již stačí vzít absolutní hodnotu ze zadaného čísla a zjistit hodnoty pro jednotlivá řešení. $x_1 = \frac{\pi}{6}$ pro první interval a $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$ pro druhý interval.

Příklad 4.

Najděte všechny úhly $x \in \langle 0; 2\pi)$, pro než platí:

a) $\cos x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = -1$ c) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Cvičení 4.

Nakreslete graf funkce $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$.

Při kreslení grafů funkcí můžeme postup zobecnit na funkci $y = a\sin(bx + c) + d$, kde jednotlivé parametry mají tento význam:

Parametr *a* – určuje „roztažení“ grafu ve svislém směru (funkce $y = \sin(x)$ má svislou velikost 2, funkce $y = a\sin(bx + c) + d$ má svislou velikost $2a$). Pokud $a < 0$ graf funkce se převrátí ve svislém směru (kolem osy *x*).

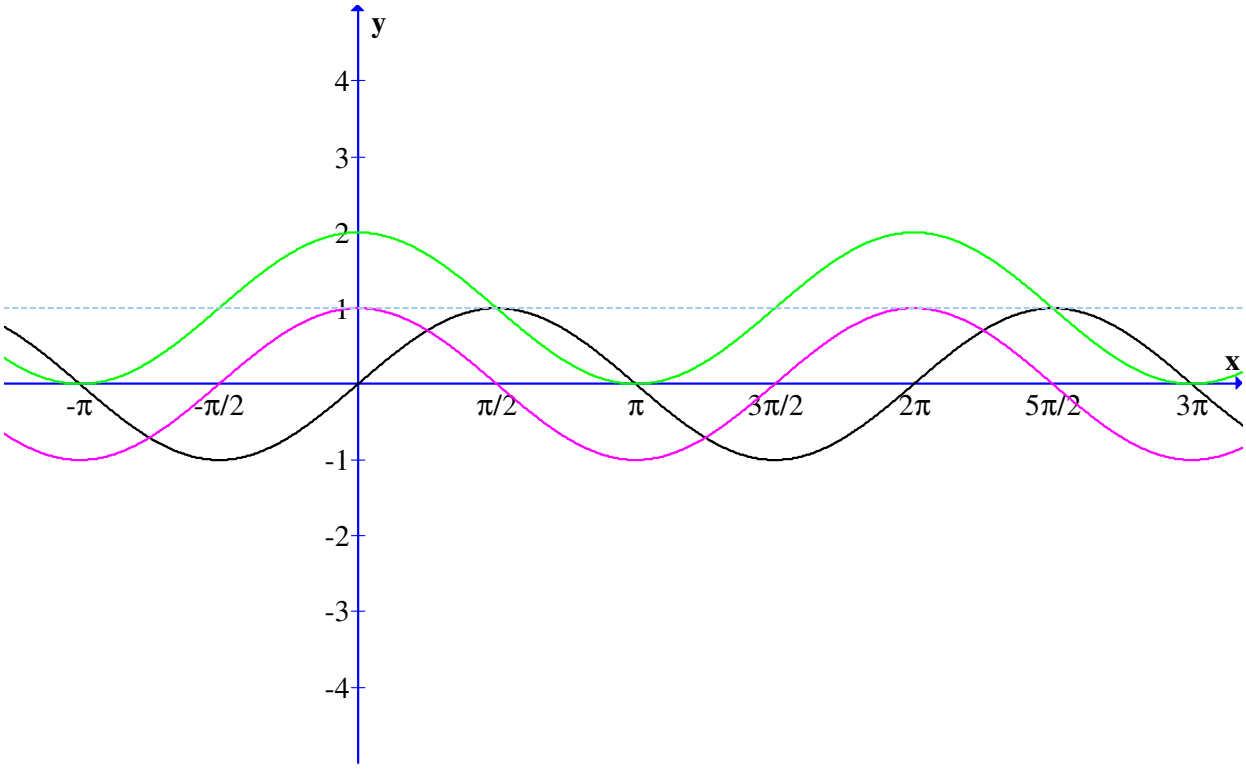
Parametr *b* – určuje „roztažení“ grafu ve vodorovném směru (funkce $y = \sin(x)$ má nejmenší periodu 2π, funkce $y = a\sin(bx + c) + d$ má nejmenší periodu $\frac{2\pi}{|b|}$). Pokud $b < 0$ graf funkce se převrátí ve vodorovném směru (kolem osy y).

Parametr *c* – spolu s parametrem *b* určuje posunutí grafu ve vodorovném směru (funkce $y = \sin(x)$ „začíná“ v bodě $x = 0$, funkce $y = a\sin(bx + c) + d$ začíná v bodě $bx + c = 0 \rightarrow x = -\frac{c}{b}$).

Parametr *d* – určuje posunutí grafu ve svislém směru (funkce $y = \sin(x)$ je souměrná kolem přímky $y = 0$, funkce $y = a\sin(bx + c) + d$ je souměrná kolem přímky $y = d$).

Ze zadání je jasné, že budeme provádět posun po ose *x* o hodnotu $-\frac{1}{2}\pi \rightarrow$ vlevo o $\frac{1}{2}\pi$. Tento graf pak posuneme po ose *y* o 1 nahoru.

$y = \sin(x) \rightarrow y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$



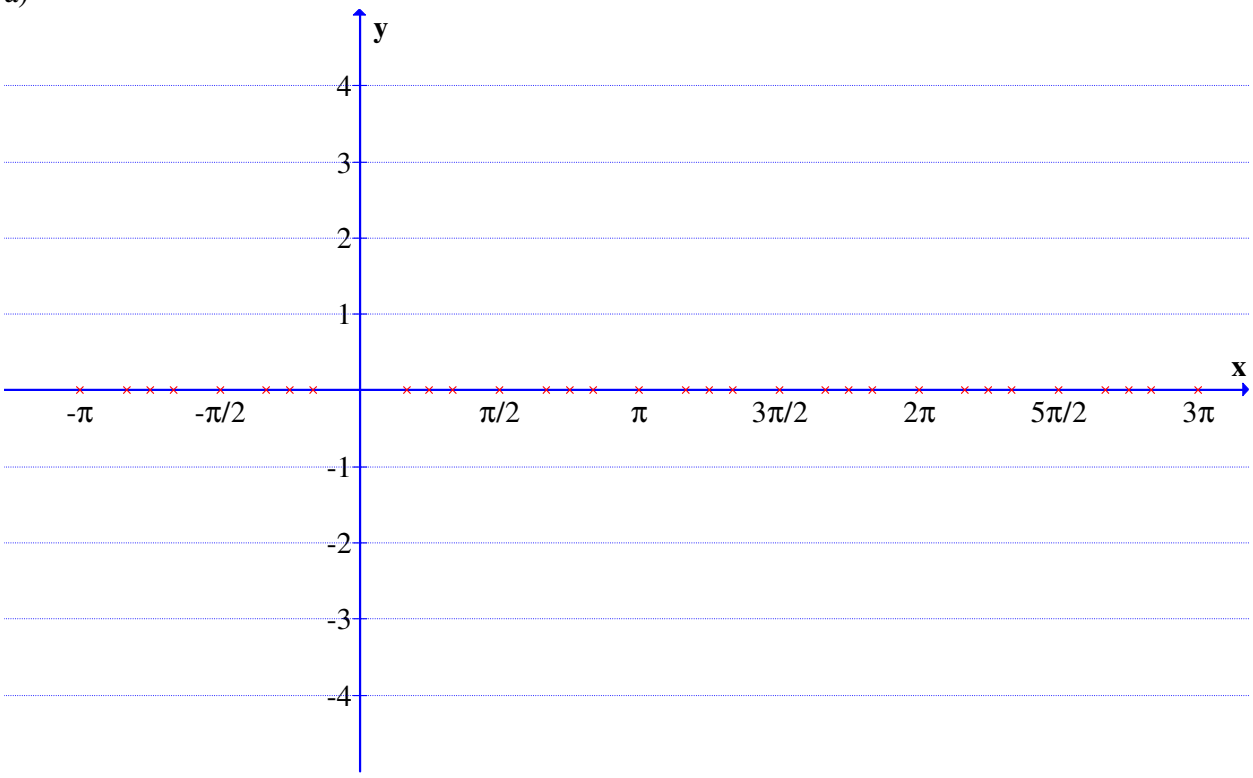
Příklad 5.

Nakreslete graf funkce:

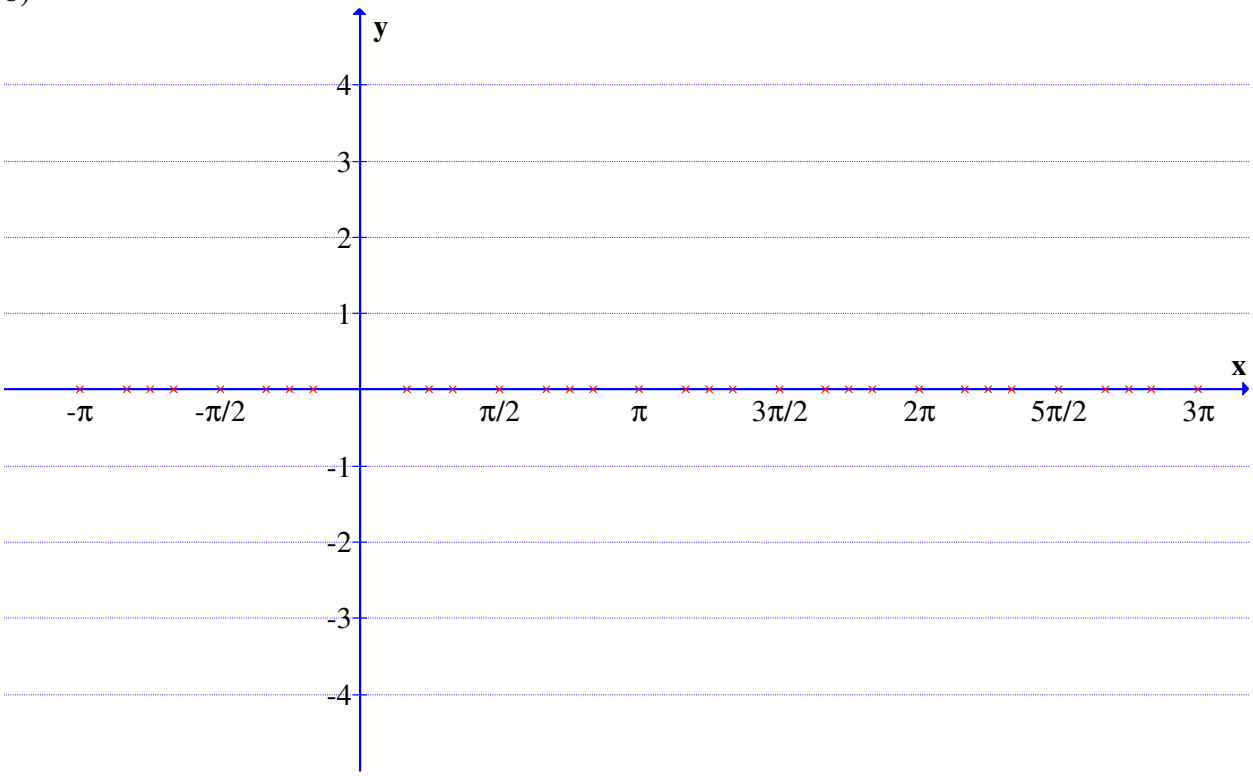
a) $y = 2\cos(x)$ b) $y = |\sin(x)|$ c) $y = \cos 3x$ d) $y = \sin 0{,}5x$

e) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ f) $y = \sin\left(3x + \frac{3}{2}\pi\right)$ g) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ h) $y = 2 - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

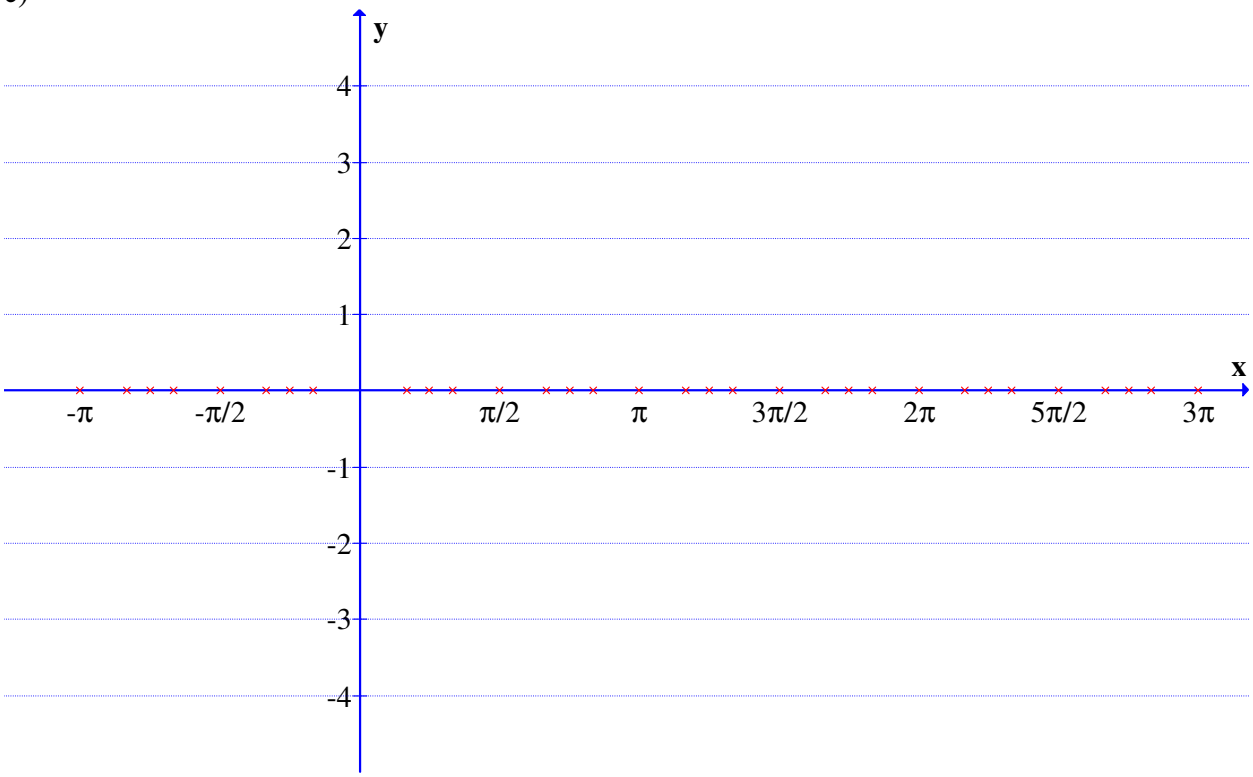
a)



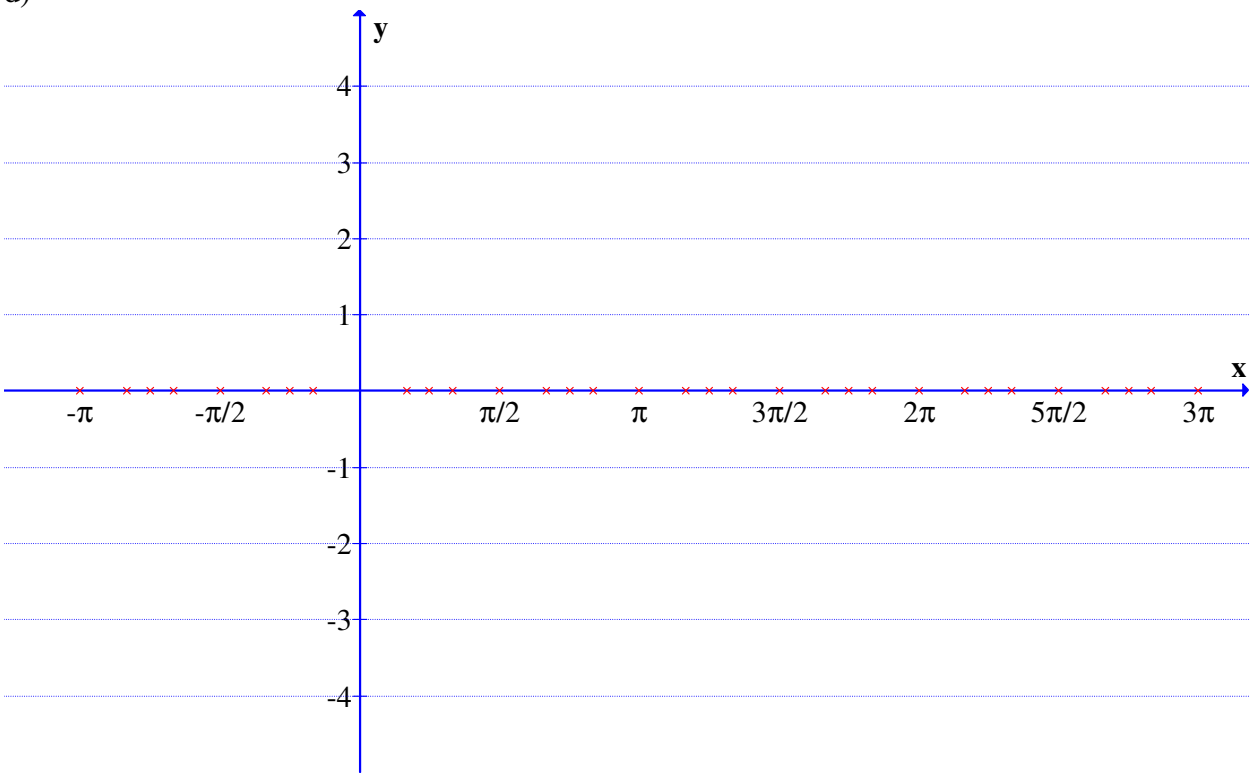
b)



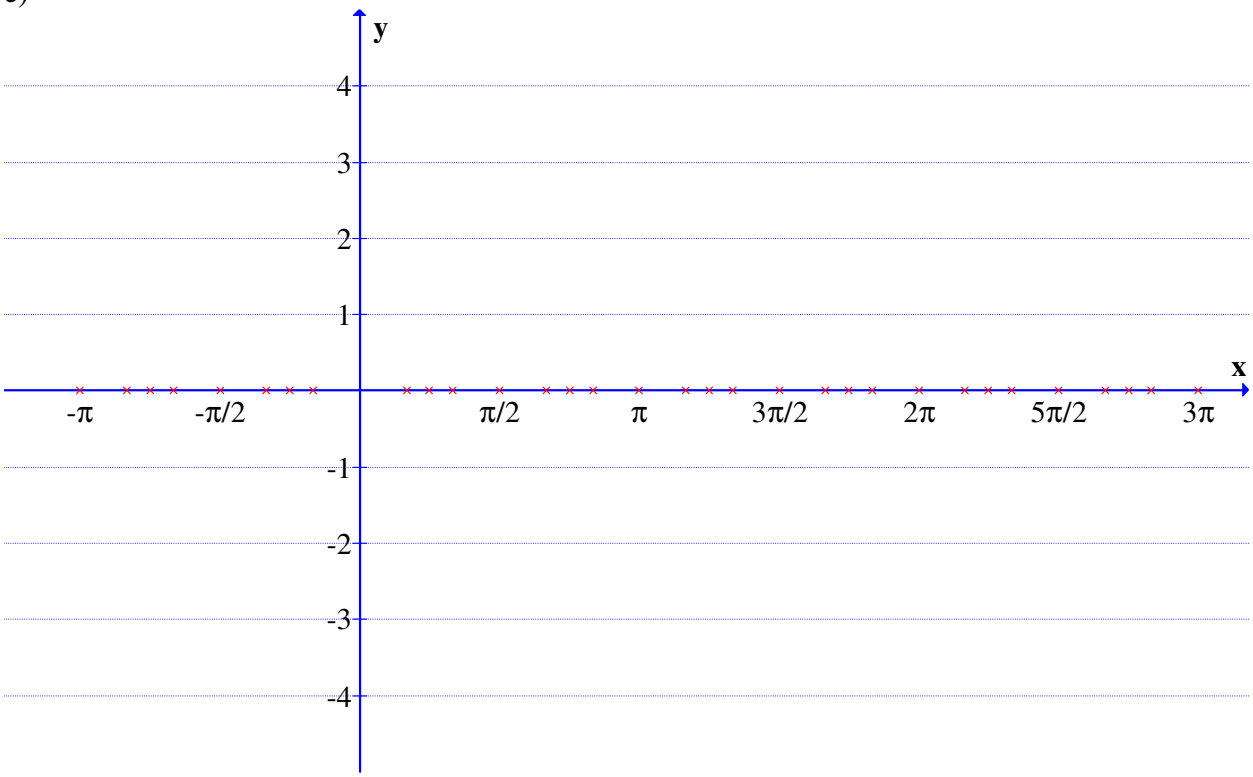
c)


y
4
3
2
1
x
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
-1
-2
-3
-4

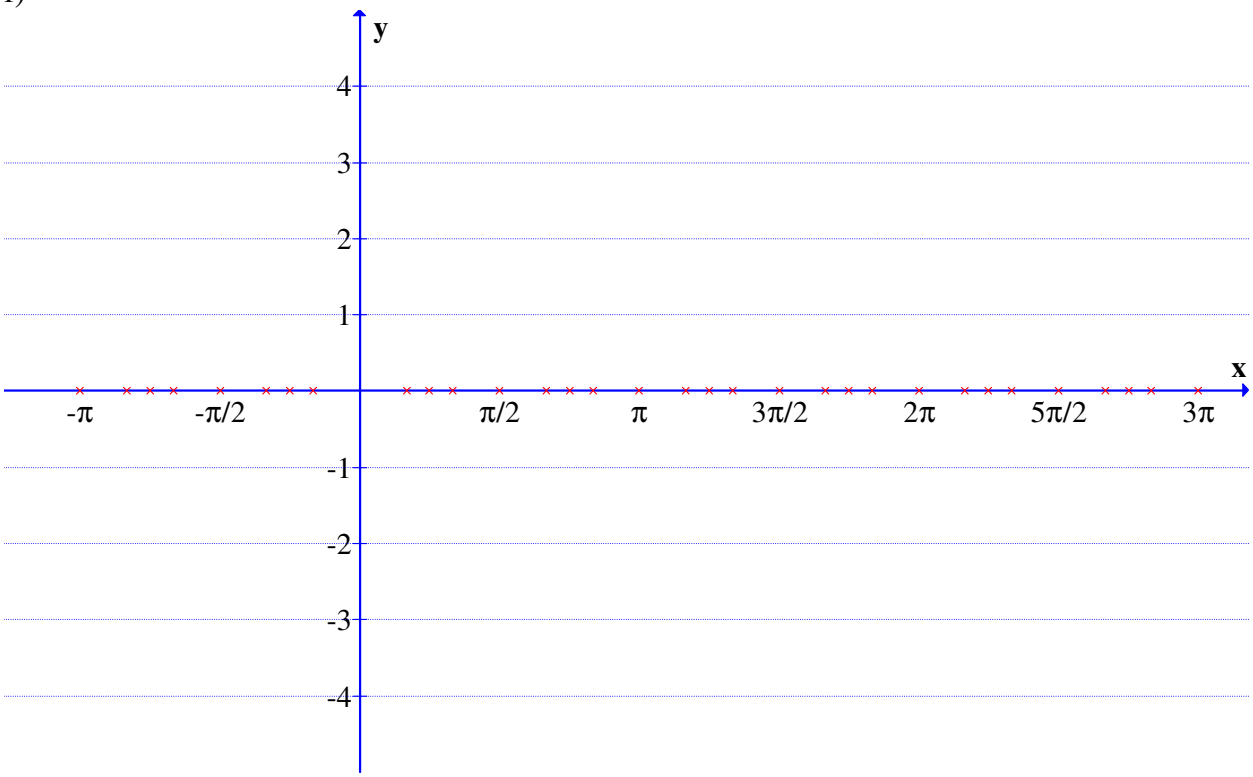
d)


y
4
3
2
1
x
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
-1
-2
-3
-4

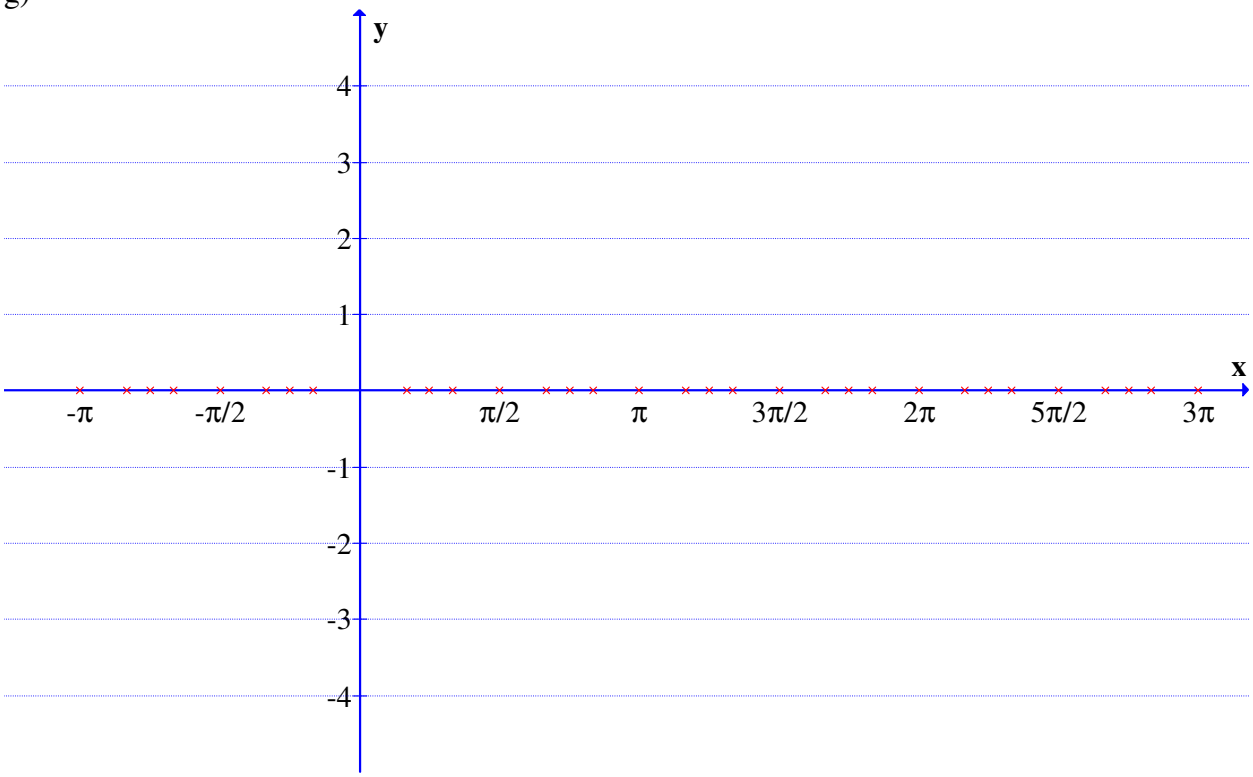
e)


y
4
3
2
1
x
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
-1
-2
-3
-4

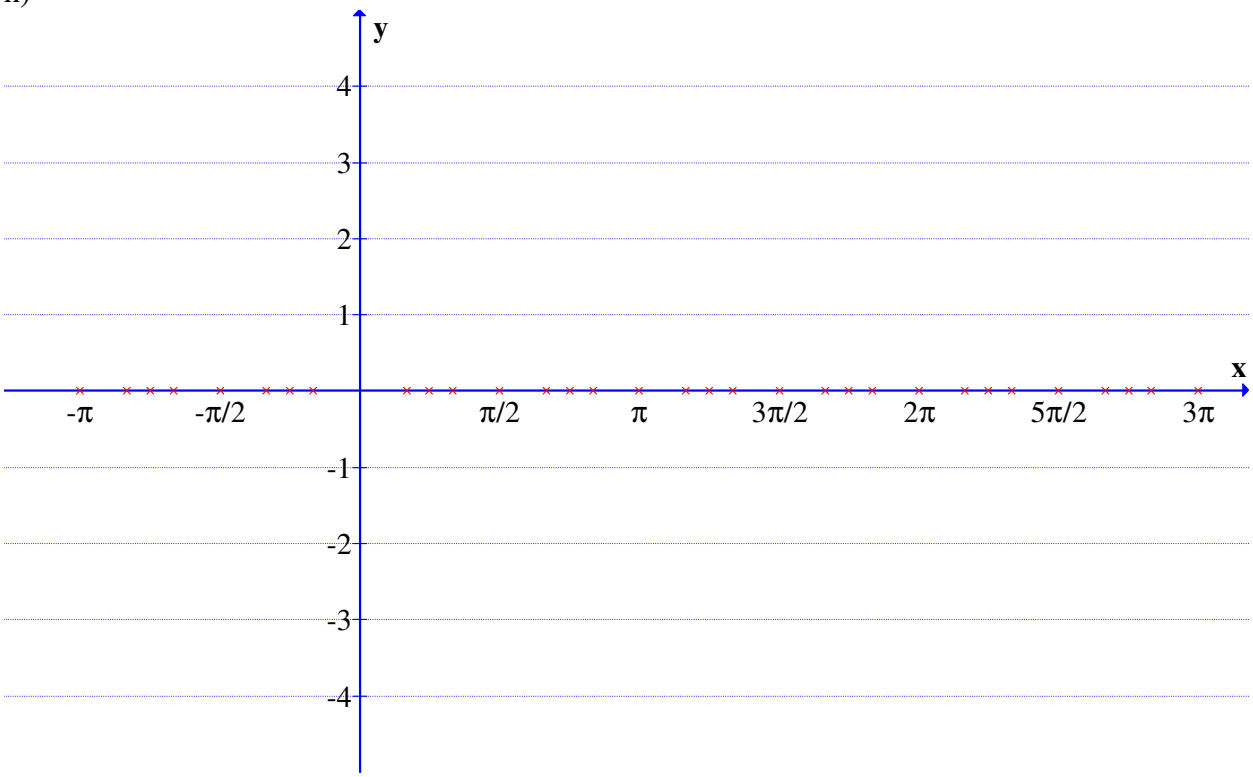
f)


y
4
3
2
1
x
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
-1
-2
-3
-4

g)


y
4
3
2
1
x
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
-1
-2
-3
-4

h)


y
4
3
2
1
x
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
-1
-2
-3
-4

Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cirjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčik, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
JIHOČESKÝ KRAJ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.