INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA

3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

Orientovaný úhel

Definice úhlu ze základní školy:
Úhel je část roviny ohraničená dvojicí polopřímek se společným počátečním bodem.

Nevýhody této definice:

- Nevíme, jaký úhel máme na mysli (konvexní nebo nekonvexní?)
- Když chceme pomocí úhlu popsat otáčení – nevíme, co popisujeme (otočení směrem nahoru nebo dolů?)

Pro odstranění těchto nevýhod budeme používat **orientovaný úhel.**

Orientovaný úhel je uspořádaná dvojice polopřímek (*VA* – počáteční rameno,*VB* – koncové rameno) **se společným počátkem** *V***.** (Orientovaný úhel značíme $\sphericalangle \overset{\frown}{AVB}$)

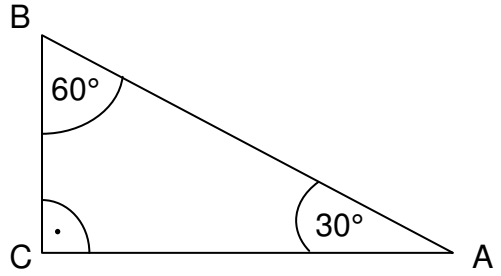
Pokud máme jednoznačně nakreslit $\sphericalangle \overset{\frown}{AVB} = 30°$, musíme vědět, co je kladný a co záporný směr otáčení:

- **Za kladné budeme považovat otáčení proti směru hodinových ručiček.**
- **Za záporné budeme považovat otáčení po směru hodinových ručiček.**

Příklad 1.

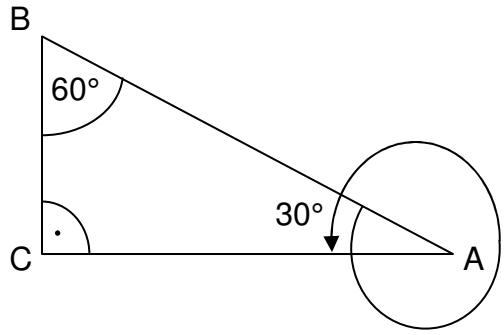
Na obrázku je nakreslen trojúhelník *ABC*. Určete velikost orientovaných úhlů:

a) $\overset{\frown}{CBA}$ b) $\overset{\frown}{CAB}$ c) $\overset{\frown}{BCA}$ d) $\overset{\frown}{BAC}$

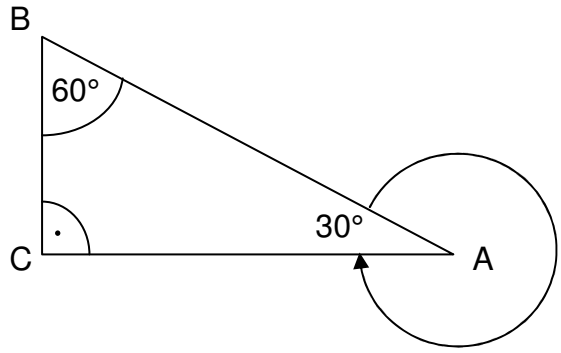


Poznámka:

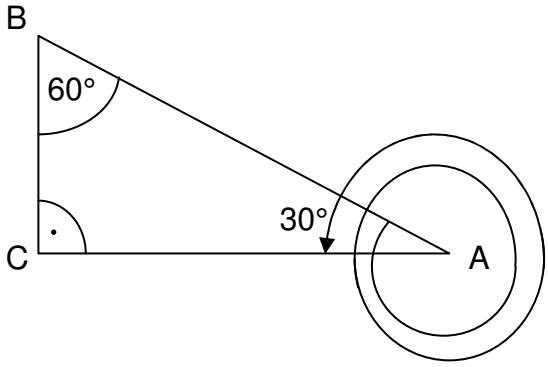
Existují i jiné způsoby jak otočit polopřímku *AB* do polopřímky *AC*:



$\sphericalangle BAC = 390°$



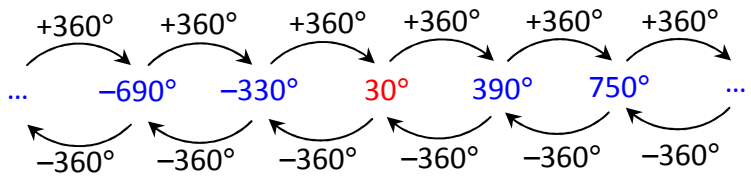
$\sphericalangle BAC = -330°$



$\sphericalangle BAC = 750°$

Takových možností je evidentně nekonečně mnoho. Zkusíme najít systém v získaných hodnotách. Seřadíme hodnoty podle velikosti:

$$\sphericalangle BAC = -330°,\ 30°,\ 390°,\ 750°$$



Všechna čísla jsou správně! Liší se o násobky $360°$, tedy o násobky otáček, po kterých se počáteční rameno dostalo do koncové pozice.
Nejmenší kladné číslo (v našem případě $30°$) = **základní velikost orientovaného úhlu** (v našem případě $\sphericalangle BAC$).

Základní velikostí úhlu nazýváme velikost α, pro kterou platí $\alpha \in \langle 0; 360°)$.

Využijeme-li známý vztah, že $360° = 2\pi$ rad, můžeme danou větu přeformulovat do obloukové míry.

Základní velikostí úhlu nazýváme velikost α, pro kterou platí $\alpha \in \langle 0; 2\pi)$.

Proto také platí:

Velikostí orientovaného úhlu $\widehat{AVB}$, jehož základní velikostí je α, se nazývá každé číslo $\alpha + k \cdot 360°$ resp. $\alpha + k \cdot 2\pi$, kde $k \in Z$.

Cvičení 1.

Rozhodněte, které z následujících čísel jsou velikosti úhlu $\widehat{AVB}$.

a) 660° b) $\frac{11}{3}\pi$

Základní velikost úhlu $\widehat{AVB}$ je $\frac{5}{3}\pi = 300°$.

a) Pokud je úhel 660° velikostí úhlu $\widehat{AVB}$ musí platit:
$660° = 300° + k \cdot 360°$
Upravíme: $660° - 300° = k \cdot 360° \rightarrow$ rozdíl $660° - 300°$ by měl být násobek 360°.
$660° - 300° = 360° \rightarrow 660°$ je velikostí úhlu $\widehat{AVB}$.

b) Pokud je úhel $\frac{11}{3}\pi$ základní velikostí úhlu α musí platit:

$\frac{11}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

Upravíme: $\frac{11}{3}\pi - \frac{5}{3}\pi = k \cdot 2\pi \rightarrow$ rozdíl $\frac{11}{3}\pi - \frac{5}{3}\pi$ by měl být násobek 2π.

$\frac{11}{3}\pi - \frac{5}{3}\pi = \frac{6}{3}\pi = 2\pi \rightarrow \frac{11}{3}\pi$ je velikostí úhlu $\widehat{AVB}$.

Příklad 2.

Rozhodněte, které z následujících čísel jsou velikosti úhlu $\widehat{AVB}$.
a) 690° b) 1 740° c) 2 490° d) –1 500°

Základní velikost úhlu $\widehat{AVB}$ je $\frac{11}{6}\pi = 330°$.

Příklad 3.

Rozhodněte, které z následujících čísel jsou velikosti úhlu $\widehat{AVB}$.

a) $\frac{29}{6}\pi$ b) $\frac{131}{6}\pi$ c) $\frac{257}{6}\pi$ d) $-\frac{175}{6}\pi$

Základní velikost úhlu α je $150° = \frac{5}{6}\pi$

Cvičení 2.

Určete základní velikost úhlu 1220° .

Pro základní velikost musí platit $1220° = \alpha + k \cdot 360° \rightarrow \alpha = 1220° - k \cdot 360° \rightarrow$ stačilo by od 1220 odečítat 360 dokud se nedostaneme do intervalu $\langle 0;360)$. Ale to je příliš zdlouhavé.

Zkusíme zjistit kolik je *k*: $\frac{1220}{360} = 3,38... \rightarrow k = 3$

Teď dosadíme: $\alpha = 1220° - k \cdot 360° = 1220° - 3 \cdot 360° = 140°$.

Cvičení 3.

Určete základní velikost úhlu –2 338°.

Pro základní velikost musí platit $-2338° = \alpha + k \cdot 360° \rightarrow \alpha = -2338° - k \cdot 360° \rightarrow$ Zjistíme kolik je *k*: $\frac{-2338}{360} = -6,49... \rightarrow k = -6$

Teď dosadíme: $\alpha = -2338° - k \cdot 360° = -2338° - (-6) \cdot 360° = -178°$.

–178° není základní velikost → musíme ještě přičíst 360°.

$\alpha = -178° + 360° = 182°$

Poznámka:

Prostým zopakováním postupu pro kladnou velikost jsme u záporné nezjistili základní velikost, ale největší zápornou velikost (neboli zápornou velikost s nejmenší absolutní hodnotou). Museli jsme pak ještě jednou připočítat 360°. Připočítávání jsme si mohli ušetřit, kdybychom použili hodnotu *k* = –7 (o jedna menší neboli s absolutní hodnotou o jedna větší, abychom přičítali větší počet násobků 360°).

Cvičení 4.

Určete základní velikost úhlu $\frac{317}{3}\pi$.

Pro základní velikost musí platit $\frac{317}{3}\pi = \alpha + k \cdot 2\pi \rightarrow \alpha = \frac{317}{3}\pi - k \cdot 2\pi \rightarrow$ stačilo by od $\frac{317}{3}$ odečítat 2 dokud se nedostaneme do intervalu $\langle 0; 2\pi)$, což je příliš zdlouhavé. Přepišme si 2π na třetiny, abychom mohli snadno odečítat ze zlomku a zjistit *k*. (Zjišťujeme kolikrát se vejde $\frac{6}{3}$ do $\frac{317}{3}$).

$k = \frac{317}{3} : \frac{6}{3} = \frac{317}{6} = 52,83... \rightarrow k = 52$

Dosazením zjistíme základní velikost úhlu $\alpha = \frac{317}{3}\pi - k \cdot 2\pi = \frac{317}{3}\pi - 52 \cdot \frac{6}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$.

Cvičení 5.

Určete základní velikost úhlu $-\frac{221}{3}\pi$.

Pro základní velikost musí platit $-\frac{221}{3}\pi = \alpha + k \cdot 2\pi \rightarrow \alpha = -\frac{221}{3}\pi - k \cdot 2\pi \rightarrow$ zjistěme *k*

$k = -\frac{221}{3} : \frac{6}{3} = -\frac{221}{6} = -36,83... \rightarrow k = -37$

Dosazením zjistíme základní velikost úhlu $\alpha = -\frac{221}{3}\pi - k \cdot 2\pi = -\frac{221}{3}\pi - (-37) \cdot \frac{6}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi$.

Příklad 4.

Určete základní velikost úhlu

a) 1 484° b) 2991° 30′ 20″ c) $\frac{11}{2}\pi$ d) $21,3\pi$

e) –2 000° f) $-\frac{49}{6}\pi$ g) $\frac{23}{4}\pi$ h) 930°

Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cirjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčik, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
JIHOČESKÝ KRAJ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.