INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Výukový materiál pro předmět

MATEMATIKA

3. ročník

Reg. č. projektu: CZ.1.07/1.1.10/01.0007

Název projektu: **Tvorba výukových materiálů pro žáky podle ŠVP**

Název příjemce: **Obchodní akademie, České Budějovice, Husova 1**

Klíčová aktivita: Využití ICT ve výuce matematiky

Použitá literatura: Seznam použité literatury je uveden v souboru MAT_3_Literatura.

Goniometrické rovnice – využití vzorců

Ve velké řadě rovnic si se substitucemi za argument popřípadě za funkci nevystačíme. Jejich řešení je většinou založeno na použití vzorců, které převede danou úlohu právě na již probrané typy goniometrických rovnic.

Nejčastěji používané vzorce:

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	$\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Poznámka:

Některé vzorce známe již z dřívějších kapitol o goniometrických funkcích. Další vzorce lze najít v matematicko-fyzikálních tabulkách.

Cvičení 1.

Řešte rovnici v *R*: $2\left(1-\sin^2 x\right)+3=7\cos x$.

V rovnici se vyskytují dvě goniometrické funkce → velice nevýhodné. Protože jedna z nich je ve druhé mocnině, snadno ji převedeme pomocí vzorce na druhou.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Po nahrazení závorky dostáváme rovnici: $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

Použijeme substituci $\cos x = y$ a dostaneme rovnici $2y^2 - 7y + 3 = 0$. Tato kvadratická rovnice má kořeny $y_1 = \dfrac{1}{2}$, $y_2 = 3$. Kořeny dosadíme do rovnice $\cos x = y$:

$$\cos x_1 = \frac{1}{2} \qquad \cos x_3 = 3$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{nemá řešení}$$

$$x_2 = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$$

Příklad 1.

Řešte rovnici v *R*:

a) $1 - 4\cos^2 x = 4\sin x$ b) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 1$ c) $\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$

d) $2\sin x \cos x = -2$ e) $\dfrac{2\sin^2 x}{3\cos x} = 1$ f*) $-2\cos^2 \dfrac{x}{2} = 11\sin\dfrac{x}{2} + 4$

(* - pro pokročilé)

Cvičení 2. (pro pokročilé)

Řešte rovnici $2\sin 2x = \sin^2 x + 3\cos^2 x$ v *R*.
Zbavme se nejdříve dvojnásobného argumentu u funkce sinus: $\sin 2x = 2\sin x\cos x \rightarrow$ $4\sin x\cos x = \sin^2 x + 3\cos^2 x$. V rovnici se nyní nachází dvě funkce – sinus a kosinus a obě v první i ve druhé mocnině. Tato situace je velmi nepříjemná → není možné použít žádný předchozí postup. Pokud si ale uvědomíme, jak je definovaná funkce tangens, už bude jasný postup: $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ → celou rovnici budeme dělit $\cos^2 x$ (samozřejmě pro přípustné hodnoty, tj. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$). Dostáváme: $\dfrac{4\sin x\cos x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{3\cos^2 x}{\cos^2 x}$. Po zkrácení a využití definice funkce tangens dostáváme: $4\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2 x + 3 \rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$. Nyní již je postup jasný. Použijeme substituci za funkci a řešíme kvadratickou rovnici. (Nezapomeňme se vrátit k substituci.) Řešení už je zřejmé: $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ a $x_2 = 1,249 + k\pi$.

Cvičení 3. (pro pokročilé)

Řešte rovnici $1 - \cos 6x = 2\sin 3x$ v *R*.
V úloze s výhodou použijeme nejdříve substituci $3x = y$. Protože 6*x* je dvojnásobek, dostáváme: $1 - \cos 2y = 2\sin y$. Opět se zbavíme dvojnásobného úhlu: $\cos 2y = \cos^2 y - \sin^2 y \rightarrow$ $1 - \left(\cos^2 y - \sin^2 y\right) = 2\sin y$. Nyní už je další postup zřejmý. Provedeme nahrazení funkce $\cos^2 y$ pomocí známého vzorce na funkci sinus, upravíme a použijeme opět substituci za funkci. $1 - \left(1 - \sin^2 y\right) + \sin^2 y = 2\sin y \rightarrow 2\sin^2 y - 2\sin y = 0 \rightarrow \sin^2 y - \sin y = 0 \rightarrow y_1 = k\pi$ a $y_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$. Samozřejmě po dosazení zpět do substituce dostáváme výsledek: $x_1 = \dfrac{k\pi}{3}$ a $x_2 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{3}k\pi$.

Cvičení 4. (pro pokročilé)

Řešte rovnici $9\sin 3x = \sin^5 3x$ v *R*.
Stejně jako v předchozí úloze použijeme nejdříve s výhodou substituci $3x = y$. Dostáváme: $9\sin y = \sin^5 y$ a po úpravě: $9\sin y - \sin^5 y = 0$. Vzhledem k vysoké mocnině funkce sinus a s přihlédnutím na tvar rovnice, bude určitě výhodné funkci vytknout: $\sin y\left(9 - \sin^4 y\right) = 0$.
Převedli jsme rovnici na součinový tvar, kde součin dvou „čísel“ je roven nule. Neboli stačí zjistit, kdy činitelé rovnají nule. (Rovnici si ještě upravíme, protože v závorce se nachází vzoreček.): $\sin y\left(3 - \sin^2 y\right)\left(3 + \sin^2 y\right) = 0$. Řešení se tedy rozdělí na tři části:

I.	II.	III.
$\sin y = 0$	$3 - \sin^2 y = 0$	$3 + \sin^2 y = 0$
$y = k\pi$	nemá řešení	nemá řešení

Po dosazení zpět do substituce dostáváme řešení: $x = \dfrac{k\pi}{3}$.

Přehled použité literatury

- Calda, E., Petránek, O., Řepová, J.: Matematika 1. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1984
- Odvárko, O., Řepová, J.: Matematika 3. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1988
- Petránek, O., Calda, E., Hebák, P.: Matematika 4. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1985
- Huťka, V., Cirjak, M., Drobná, O., Švidroňová, A.: Matematika 7. Část pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť, SPN, n. p., Praha 1986
- Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách I, Prometheus, s. r. o., Praha 2002
- Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Prometheus, s. r. o., Praha 1999
- Bušek, I.: Řešené maturitní úlohy z matematiky, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Kubát, J., Hrubý, D., Pilgr, J.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – maturitní minimum, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Čermák, P., Červinková, P.: Odmaturuj z matematiky 1, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Boucník, P., Herman, J., Krupka, P., Šimša, J.: Odmaturuj z matematiky 3, Didaktis, s. r. o., Brno 2004
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Hudcová, M., Kubíčková, L.: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné učiliště a střední odborné školy a nástavbové studium, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Kubát, J.: Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2004
- Odvárko, O.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – funkce, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Bušek, I.: Sbírka úloh z matematiky pro gymnázia – analytická geometrie, Prometheus, s. r. o., Praha 2006
- Petáková, J.: Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2005
- Janeček, F.: Sbírka úloh z matematiky pro střední školy – výrazy, rovnice, nerovnice a jejich soustavy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Pešková, E., Mulačová, J.: Přehled středoškolské matematiky, Albra, Praha 1996
- Hrubý, D.: Matematická cvičení pro střední školy, Prometheus, s. r. o., Praha 2008
- Kováčik, J. a kolektiv: Řešené příklady z matematiky pro střední školy, ASPI, a. s., Praha 2006

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
JIHOČESKÝ KRAJ
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.