Kombinatorika

1. Variace
2. Permutace
3. Kombinace

Variace

Jsou to skupiny prvků, ve kterých:

- záleží na pořadí prvků
- značíme je $V_k(n)$

$1 \leq k \leq n$

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots \cdot (n-k+1)$$

Příklad 1

Do finále školních závodů postoupilo 6 vítězů třídních soutěží. Kolik existuje možností

a/ pro udělení první ceny
b/ pro udělení první a druhé ceny
c/ pro udělení první, druhé a třetí ceny?

Příklad č. 1 - řešení

ada/ Vítězem závodu může být pouze jeden z účastníků finále. Úloze vyhovuje každý prvek z množiny všech účastníků závodu. Existuje tedy 6 možností.

adb/ Najdeme všechny uspořádané dvouprvkové skupiny z množiny všech účastníků závodů. Existuje dohromady 6 x 5 = 30 různých možností.

adc/ Všechna tři místa uspořádané trojice můžeme obsadit 6 x 5 x 4 = 120 různými způsoby.

Příklad 2

Kolik trojciferných přirozených čísel s různými číslicemi lze sestavit z číslic 0, 1, 2, 3, 4, 5?

Příklad č. 2 - řešení

Uvažujeme 6 prvkovou množinu. Protože záleží na pořadí číslic, z kterých se čísla skládají, trojciferná čísla tvořená prvky jsou variace 3. třídy ze 6 prvků. Některé tyto variace mají na 1. místě číslici 0 (není trojciferné číslo). Počet těchto variací určíme jako variace 2. třídy z 5 prvků.
Nakonec obě číselné hodnoty odečteme.

$$V_3(6) - V_2(5) = 6 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 100$$

Příklad 3

Vypište všechny variace třetí třídy z prvků a, b, c, d

Příklad č. 3 - řešení

$$V_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

abc,abd,acb,adb,acd,adc,
bac,bca,bad,bda,bcd,bdc,
cab,cba,cad,cda,cbd,cdb,
dab,dba,dac,dca,dbc,dcb

Příklad 4

V první fotbalové lize je 16 mužstev. Kolika způsoby může být na konci soutěže obsazeno první, druhé a třetí místo?

Příklad č. 4 - řešení

$$V_3(16) = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$$

Příklad 5

Osnovy předepisují žákům dvanáct různých předmětů, každý předmět se může vyučovat nejvýš 1 hodinu denně. Kolika způsoby je možné sestavit rozvrh hodin na jeden den, jestliže se vyučuje 5 předmětů?

Příklad č. 5 - řešení

$$V_5(12) = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040$$

Příklad 6

Kolik jednociferných až čtyřciferných přirozených čísel s různými číslicemi je možno vytvořit z číslic 1, 2, 3, 5, 6, 7?

Příklad č. 6 - řešení

jednociferných	6
dvojciferných	6 x 5 =30
trojciferných	6 x 5 x 4 = 120
čtyřciferných	6 x 5 x 4 x 3 = 360
celkem	516

Příklad 7

Z kolika prvků je možno utvořit 210 variací druhé třídy?

Příklad č. 7 - řešení

$$V_2(n) = 210 = n \cdot (n-1)$$

n = 15

Příklad 8

Zvětší- li se počet prvků množiny M o dva, zvětší se počet variací druhé třídy o 22. Jaký je původní počet prvků množiny M?

Příklad č. 8 - řešení

$$V_2(n+2) = V_2(n) + 22$$

n = 5

Permutace, faktoriál

Permutace jsou variace n té třídy z n prvků

$$\boxed{P(n) = n!}$$

Příklad č. 1

Kolik pěticiferných čísel lze sestavit z číslic 1, 2, 3, 4, 5, jestliže se v žádném z čísel nemá opakovat žádná číslice? Kolik z těchto čísel je dělitelných čtyřmi?

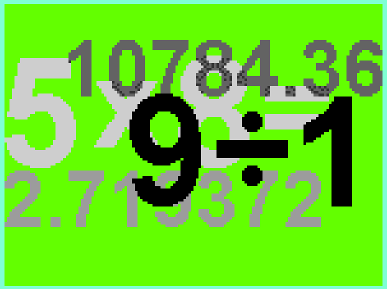
Příklad č. 1 - řešení

$$P(n) = 5! = 120$$

Dělitelnost čtyřmi - poslední dvojčíslí daného čísla je dělitelné čtyřmi.
Dvojčíslí: 12, 24, 52, 32.

$$P(3) = 3! = 6$$

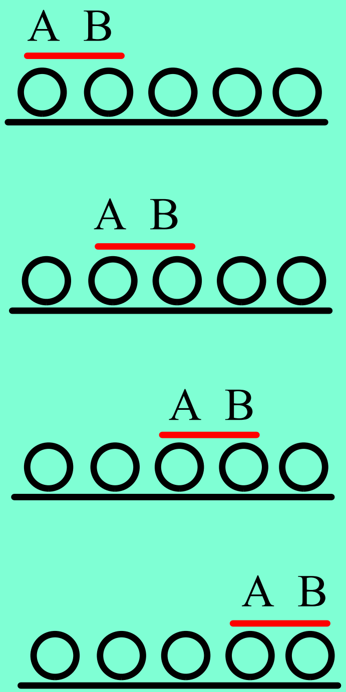
$$4 \cdot 3! = 24$$



Příklad č. 2

Na lavičce v parku sedí 5 chlapců. Kolikrát se mohou přesadit, jestliže dva přátelé chtějí sedět vedle sebe?

Příklad č. 2 - řešení



$$P(3) = 3! = 6$$

$$P(3) = 3! = 6$$

$$P(3) = 3! = 6$$

$$P(3) = 3! = 6$$

$$P(4) = 4! = 24$$

$$24$$

Místo pořadí chlapců A B ještě
řešíme pořadí B A

$$\boxed{24 \cdot 2 = 48}$$

Příklad č. 3

Kolik čtyřciferných čísel je možno utvořit z číslic 0, 1, 2, 3 bez opakování číslic?

Příklad č. 3 - řešení

P(4) = 4*3*2 = 24
Ještě odečteme čísla s nulou na začátku - nejsou čtyřciferná.
P(3) = 3*2 = 6
24 - 6 = 18

Příklad č. 4

V množině N řešte rovnice:

$$\frac{(x-1)!}{(x-3)!} - 2 \cdot \frac{x!}{(x-1)!} = -2$$

4 8

12

Příklad č. 4 - řešení

$x \neq 1,2$

0! = 1

x = 4

Příklad č. 5

V množině N řešte rovnice:

$$\frac{2\cdot(x+1)!}{(x-1)!}+\frac{3\cdot(x-1)!}{(x-2)!}=49$$

Příklad č. 5 - řešení

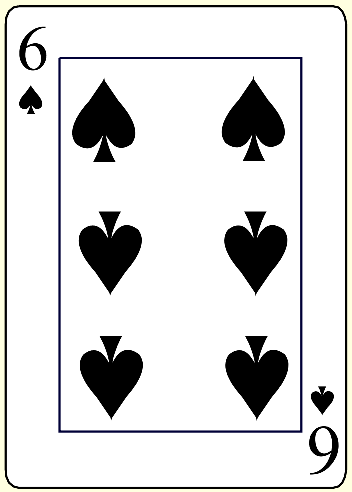
$x \neq 1$

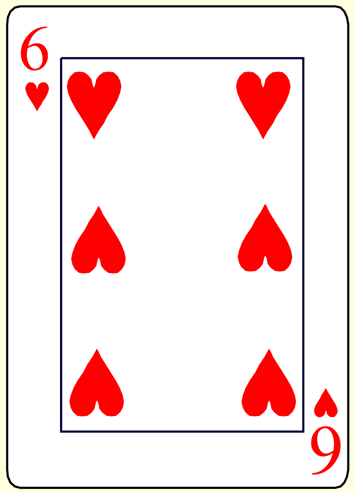
x = 4

Kombinace

Jsou to skupiny prvků, ve kterých:

- nezáleží na pořadí prvků
- je rozhodující jen to, které konkrétní prvky ve skupině jsou





Příklady:

Kolik různých přímek je možné sestrojit 6 body v rovině?

Kolik je možných tipů ve sportce?

Kombinace

$$1 \leq k \leq n$$

$$C_k(n) = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{V_k(n)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Kombinační číslo

Příklad 1

Kolik je různých tipů ve sportce, jestliže v každém tiketu tipujeme dvě ze šesti čísel, např. 7 a 13?

Ve sportce losujeme 6 ze 49 čísel. Protože jsou ale dvě čísla pevně zvolená (6 a 13), zbývají 4 čísla. Ty ale vybíráme už jen ze 47. Nezáleží na pořadí tažených čísel.

$$\binom{47}{4} = \frac{47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 178365$$

Příklad 2

Kolik přímek je možno proložit 6 různými body, z nichž žádné 3 neleží v jedné přímce?

$$C_2(6) = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

Příklad 3

Při mezinárodním setkání se setkalo 10 účastníků. Všichni si navzájem podali ruce. Kolik podání ruky se uskutečnilo?

$$p = C_2(10) = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = 45$$

Příklad 4

Oddíl vojáků staví dva muže na stráž. Kolik mužů má oddíl, může-li být stráž sestavena 153 způsoby?

$$C_2(n) = 153$$

$$\frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 153$$

n = 18

Příklad 5

Kolikerým způsobem je možné sestavit delegaci, ve které budou 3 chlapci a 2 děvčata, je-li ve třídě 15 chlapců a 10 děvčat?

$$\binom{15}{3}\cdot\binom{10}{2}$$

$$p=\frac{15!}{12!\cdot 3!}\cdot\frac{10!}{8!\cdot 2!}=20475$$

Příklad 6

Z kolika prvků je možno utvořit 66 kombinací druhé třídy?

n = 12